

**Baccalauréat Sciences Mathématiques****Session : Normal** juin 2009**MATHÉMATIQUES**Série : **Sciences Mathématiques A et B**DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures****INSTRUCTIONS GENERALES**

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

**COMPOSANTES DU SUJET***Ce sujet comporte 4 exercices :*

- Exercice 1 : **Structures algébriques** ..... **3 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ..... **4 points**
- Exercice 3 : **Arithmétiques** ..... **3 points**
- Exercice 4 : **Analyse** ..... **10 points**

**Exercice 1 : (3 pts)**

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2.

On rappelle que  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +; \times)$  est un anneau unitaire dont l'élément neutre est  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des matrices carrées  $M(x; y)$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que :

$$M(x; y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \text{ avec } (x; y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

0,25 pt

0,5 pt

1 pt

0,25 pt

0,5 pt

0,5 pt

1 - a) Montrer que l'ensemble  $\mathcal{F}$  est une partie stable de  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); \times)$ .

b) Montrer que  $(\mathcal{F}; \times)$  est un groupe non commutatif.

2 - Soit  $G$  l'ensemble des matrices  $M(x; 0)$  de  $\mathcal{F}$  avec  $x \in \mathbb{R}^*$ .

Montrer que l'ensemble  $G$  est un sous-groupe du groupe  $(\mathcal{F}; \times)$ .

3 - On pose  $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ . On munit l'ensemble  $E$  de la loi de composition interne  $\perp$  définie par :

$$(\forall (x; y) \in E)(\forall (a; b) \in E) ; (x; y) \perp (a; b) = (ax; bx + \frac{y}{a})$$

et on considère l'application  $\phi : (\mathcal{F}; \times) \longrightarrow (E; \perp)$   
 $M(x; y) \longmapsto \phi(M(x; y)) = (x, y)$

a) Calculer  $(1; 1) \perp (2; 3)$  et  $(2; 3) \perp (1; 1)$ .

b) Montrer que  $\phi$  est un isomorphisme.

c) En déduire la structure de  $(E; \perp)$ .

**Exercice 2 : (4 pts)**

Soit  $m$  un nombre complexe différent de 1.

I) On considère dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  l'équation d'inconnue  $z$  :

$$(E) : z^2 - (1 - i)(m + 1)z - i(m^2 + 1) = 0$$

0,25 pt

0,25 pt

0,5 pt

1 pt

0,5 pt

1 - a) Vérifier que le discriminant de l'équation  $(E)$  est :  $\Delta = [(1 + i)(m - 1)]^2$

b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$ .

c) Déterminer sous forme algébrique les deux valeurs du complexe  $m$  pour afin que le produit des deux solutions de l'équation  $(E)$  est égal à 1.

2 - On pose  $z_1 = 1 - im$  et  $z_2 = m - i$

Écrire  $z_1$  et  $z_2$  sous forme trigonométrique dans le cas où  $m = e^{i\theta}$  avec  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

II) Le plan complexe  $(\mathcal{P})$  est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$

On considère les points  $M$ ,  $M_1$  et  $M_2$  d'affixes respectivement  $m$ ;  $z_1 = 1 - im$  et  $z_2 = m - i$

1 - Déterminer l'ensemble des points  $M$  pour lesquels les points  $M$ ,  $M_1$  et  $M_2$  soient alignés.

- 0,5 pt a) Montrer que la transformation  $R$  reliant chaque point  $M$  d'affixe  $z$  au point  $M'$  d'affixe  $z' = 1 - iz$  est une rotation dont on déterminera l'affixe du centre  $\Omega$  et une mesure de son angle.
- 0,5 pt b) Montrer que le nombre complexe  $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$  est un imaginaire pure si et seulement si  $\Re(m) + \Im(z) = 1$ .
- 0,5 pt c) En déduire l'ensemble des points  $M$  tel que les points  $\Omega$ ,  $M$ ,  $M_1$  et  $M_2$  soient cocycliques.

**Exercice 3 : (3 pts)**

Pour tout  $n$  entier naturel non nul, on pose :  $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

- 0,25 pt 1 - a) Vérifier que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $a_n$  est pair.
- 0,5 pt b) Déterminer les valeurs de  $n$  pour lesquelles :  $a_n \equiv 0 [3]$
- 2 - Soit  $p$  un entier premier tel que :  $p > 3$
- 0,75 pt a) Montrer que :  $2^{p-1} \equiv 1 [p]$ ,  $3^{p-1} \equiv 1 [p]$  et  $6^{p-1} \equiv 1 [p]$
- 0,75 pt b) Montrer que l'entier  $p$  divise  $a_{p-2}$
- 0,75 pt c) Montrer que pour tout entier naturel  $q$ , il existe un entier naturel non nul  $n$  tel que :

$$a_n \wedge q = q$$

( $a_n \wedge q$  désigne le plus grand commun diviseur de  $a_n$  et  $q$ )

**Exercice 4 : (10 pts)**

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

On considère la fonction  $f_n$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x(1 - \ln(x))^n & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

**Partie I :**

Soit  $(\mathcal{C}_n)$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité 2cm)

- 0,5 pt 1 - a) Montrer que la fonction  $f_n$  est continue à droite au point 0. (poser  $x = t^n$ )
- 0,25 pt b) Étudier la dérivabilité de la fonction  $f_n$  à droite au point 0.
- 1 pt c) Calculer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$
- 0,5 pt 2 - a) Étudier les variations de la fonction  $f_1$ .
- 0,5 pt b) Étudier les variations de la fonction  $f_2$ .
- 0,25 pt 3 - a) Étudier la position relative des courbes  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_2)$ .

0,5 pt

b) Construire les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$ .(On admet que le point  $A(1; 1)$  est un point d'inflexion pour la courbe  $(C_2)$ ).**Partie II :**On considère la fonction  $F$  définie sur  $] -\infty; 0]$  par :  $F(x) = \int_{e^x}^1 \frac{f_1(t)}{1+t^2} dt$ 

0,5 pt

1 - a) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $] -\infty; 0]$  et que :  $(\forall x < 0) : F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$ 

0,25 pt

b) En déduire le sens de variations de la fonction  $F$  sur  $] -\infty; 0]$ .

0,25 pt

2 - a) Montrer que :  $(\forall x < 0) : \frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt$ 

0,25 pt

b) Vérifier que la fonction  $x \mapsto x^2 \left( \frac{3}{4} - \frac{\ln(x)}{2} \right)$  est une primitive de la fonction  $f_1$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

0,25 pt

c) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt = \frac{3}{4}$ 

0,25 pt

3 - On suppose que la fonction  $F$  admet une limite finie  $L$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$ .Montrer que  $\frac{3}{8} \leq L \leq \frac{3}{4}$ .**Partie III :**Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose :  $U_n = \int_1^e f_n(x) dx$ 

0,5 pt

1 - a) Montrer que :  $(\forall n \geq 1) ; U_n \geq 0$ 

0,5 pt

b) Déterminer le signe de  $f_{n+1}(x) - f_n(x)$  sur l'intervalle  $[1; e]$ .

0,25 pt

c) Montrer que :  $(\forall n \geq 1) ; U_{n+1} \leq U_n$ .

0,25 pt

d) En déduire que la suite  $(U_n)_{n \geq 1}$  est convergente.

0,5 pt

2 - a) Montrer que :  $(\forall n \geq 1) ; U_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} U_n$ 

0,5 pt

b) En déduire en  $cm^2$  l'aire du domaine délimité par les deux courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ .

0,75 pt

3 - a) Montrer que :  $(\forall n \geq 2) ; \frac{1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{n-1}$ 

0,5 pt

b) Calculer les limites  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nU_n$ .4 - Soit  $a$  un nombre réel différent de  $U_1$ .On considère la suite numérique  $(V_n)_{n \geq 1}$  définie par : 
$$\begin{cases} V_1 = a \\ V_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} V_n ; (\forall n \geq 1) \end{cases}$$
 et pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose :  $d_n = |V_n - U_n|$ 

0,25 pt

a) Montrer que :  $(\forall n \geq 1) : d_n = \frac{n!}{2^{n-2}} d_1$ 

0,25 pt

b) Montrer que :  $(\forall n \geq 2) : \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$ 

0,25 pt

c) Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = +\infty$ 

0,25 pt

d) En déduire que la suite  $(V_n)_{n \geq 1}$  est divergente.**FIN**