



الصفحة
1 4



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2011
الموضوع

9	المعامل	NS25	الرياضيات	المادة
4	مدة الإجابة		شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعب (ة) أو الممثل

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques.
- Le deuxième exercice se rapporte à l'arithmétique.
- Le troisième exercice se rapporte aux nombres complexes.
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse.
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse.

<https://sigmoid.ma>

Les calculatrices non programmables sont autorisées

<https://sigmoid.ma>

Premier exercice : (4 points) **Les deux parties sont indépendantes.****Première partie** : Dans l'anneau $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ on considère les deux matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(On pose : $A^0 = I$ et $A^1 = A$ et $A^2 = A \times A$ et $A^{n+1} = A^n \times A$ pour tout n de $\mathbb{N}$)0.5 1-Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}) A^{2k} = I$ 0.5 2-Montrer que A admet une matrice inverse A^{-1} que l'on déterminera.**Deuxième partie** : Soit a un nombre réel.Pour tout x et y de l'intervalle $I =]a, +\infty[$ on pose : $x * y = (x - a)(y - a) + a$ 0.5 1-a) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I 0.5 b) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.0.5 c) Montrer que $(I, *)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.0.5 2-Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.3-On considère l'application : $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}_+^*$

$$x \mapsto \frac{1}{x - a}$$

0.5 a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(I, *)$ vers $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ 0.5 b) Résoudre dans l'ensemble I l'équation : $x^{(3)} = a^3 + a$ où $x^{(3)} = x * x * x$ **Deuxième exercice** : (2.5 points)Soit N l'entier naturel dont l'écriture dans la base décimale est : $N = \underbrace{11 \dots 11}_{2010 \text{ fois } 1}$ 0.25 1-Montre que le nombre N est divisible par 110.75 2-a) Vérifier que le nombre 2011 est premier et que $10^{2010} - 1 = 9N$ 0.5 b) Montrer que le nombre 2011 divise le nombre $9N$ 0.5 c) En déduire que le nombre 2011 divise le nombre N .0.5 3- Montrer que le nombre N est divisible par 22121

Troisième exercice : (3.5points)

Première partie : Soit m un nombre complexe non nul. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $(E_m) : z^2 + [(1-i)m - 4]z - im^2 - 2(1-i)m + 4 = 0$

1-Vérifier que le nombre $z_1 = -m + 2$ est solution de l'équation (E_m)

2-Soit z_2 la deuxième solution de l'équation (E_m)

a) Montrer que : $z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$

b) Déterminer les deux valeurs de m pour lesquelles on a : $z_1 z_2 = 1$

Deuxième partie : Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, On considère l'application S qui au point M , d'affixe z , fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que : $z' - 1 = -(z - 1)$ et la rotation R de centre le point Ω d'affixe $(1+i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et soit z'' l'affixe du point $M'' = R(M)$.

1-a) Montrer que l'application S est la symétrie centrale de centre le point d'affixe 1.

b) Montrer que : $z'' = iz + 2$.

2-Soit A le point d'affixe 2. On suppose que le point M est distinct du point O origine du repère.

a) Calculer : $\frac{z'' - 2}{z' - 2}$, en déduire la nature du triangle $AM'M''$.

b) Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels les points A, Ω, M' et M'' sont cocycliques.

Quatrième exercice : (6.5points)

Première partie : Etude des solutions positives de l'équation $(E) : e^x = x^n$ avec n un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f définie sur l'ensemble $D = [0, 1[\cup]1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0 \quad \text{et soit } (C) \text{ sa courbe représentative dans le plan rapporté à}$$

un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- Vérifier que pour tout x de l'ensemble $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ on a : $e^x = x^n \Leftrightarrow n = f(x)$

2- Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0.

3-Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ensuite interpréter graphiquement les résultats obtenus.

4-Etudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $[0, 1[$ et $]1, +\infty[$ puis donner son tableau de variations.

5-Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

6- Représenter graphiquement (C) .

7-Montrer que pour $n \geq 3$, l'équation (E) admet exactement deux solutions a_n et b_n tel que : $1 < a_n < e < b_n$

Deuxième partie : Etude des deux suites $(a_n)_{n \geq 3}$ et $(b_n)_{n \geq 3}$

- 0.5 1-Montrer que : $(\forall n \geq 3) b_n \geq n$, en déduire la limite de la suite $(b_n)_{n \geq 3}$
- 0.5 2-a) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.
- 0.5 b) Montrer que : $(\forall n \geq 3) \frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$, en déduire la limite de la suite $(a_n)_{n \geq 3}$
- 0.5 c) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^n = e$

Cinquième exercice : (3.5points)

On considère la fonction numérique F définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$

- 0.5 1-a) Montrer que : $(\forall x \geq 0) 0 \leq F(x) \leq x e^{-x^2}$
- 0.5 b) Montrer que : $(\forall x \geq 1) e^{-x^2} \leq e^{-x}$ en déduire la limite de la fonction F en $+\infty$
- 0.5 2-Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et que :
- $$(\forall x \geq 0) F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$$

3-On considère la fonction numérique G définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} G(x) = F(\tan x) ; & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

- 0.25 a) Montrer que la fonction G est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$
- 0.75 b) Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]0; +\infty[$ tel que : $F'(c) = 0$
- et que : $F(c) = \frac{e^{-2c^2}}{2c}$

(On pourra appliquer le théorème de ROLLE à la fonction G sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$)

4-On considère la fonction numérique H définie sur $]0; +\infty[$ par : $H(x) = F'(x) \frac{e^{x^2}}{2x}$

- 0.5 a) Montrer que la fonction H est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$
- 0.5 b) En déduire que c est unique, puis donner le tableau de variation de F .

FIN