★★

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2017
- الموضوع -

NS 25

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⴰⵏⴰⵏ
ⴷ ⵓⵙⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⴰⴼⵍⵍⴰ ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعبة أو المسلك

- La durée de l’épreuve est de 4 heures.
- L’épreuve comporte 4 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l’ordre choisi par le candidat.

- L’exercice1 se rapporte aux structures algébriques.....(3,5pts)
- L’exercice2 se rapporte aux nombres complexes..........(3,5pts)
- L’exercice3 se rapporte à l’arithmétique........................(3pts)
- L’exercice4 se rapporte à l’analyse..................................(10pts)

L’usage de la calculatrice n’est pas autorisé
L’usage de la couleur rouge n’est pas autorisé

EXERCICE1 : (3,5 points)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

On pose $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ et pour tout (a,b) de $\mathbb{R}^2$, $M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b&-b\\0&0&0\\b&-a&a\end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $E=\{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$

0.5 1-Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_3(\mathbb{R}),+)$

0.5 2- On définit dans $M_3(\mathbb{R})$ la loi de composition interne $\top$ par :

$$(\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4)\quad M(a,b)\top M(c,d)=M(a,b)\times A\times M(c,d)$$

Vérifier que E est stable dans $(M_3(\mathbb{R}),\top)$

3- soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ dans E qui à tout nombre complexe non nul $a+ib$ (où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$) fait correspondre la matrice $M(a,b)$ de E

0.75 a) Vérifier que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E,\top)$ et que $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$ où $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$

0.75 b)En déduire que $(E^*,\top)$est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre J

0.5 4- a) Montrer que la loi de composition interne "$\top$" est distributive par rapport à la loi de composition interne "$+$"dans E

0.5 b) En déduire que $(E,+,\top)$ est un corps commutatif .

EXERICE2 :(3,5 points)

Soit m un nombre complexe **non nul**.

Partie1 : On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E):\quad 2z^2-2(m+1+i)z+m^2+(1+i)m+i=0$$

0.5 1- Vérifier que le discriminent de l'équation (E) est : $\Delta=(2im)^2$

0.5 2- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

Partie2 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

On suppose que : $m \in \mathbb{C}\setminus\{0,1,i\}$ et on pose : $z_1 = \frac{1+i}{2}(m+1)$ et $z_2 = \frac{1-i}{2}(m+i)$

On considère les points A, B, M, M_1 et M_2 d'affixes respectifs $1, i, m, z_1$ et z_2

0.25 1-a)Vérifier que : $z_1 = iz_2 + 1$

0.5 b) Montrer que M_1 est l'image de M_2 par la rotation de centre le point Ω d'affixe $\omega = \frac{1+i}{2}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$

0.5 2- a)Vérifier que : $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i\frac{m-1}{m-i}$

0.5 b) Montrer que si les points M, M_1 et M_2 sont alignés alors M appartient au cercle (Γ) de diamètre $[AB]$

0.75 c) Déterminer l'ensemble des points M pour que les points Ω, M, M_1 et M_2 soient cocycliques (remarquer que : $\frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} = i$)

EXERCICE3 :(3points)

On admet que 2017 est un nombre premier, et que $2016 = 2^5 3^2 7$

Soit p **un nombre premier supérieur ou égal à 5**

1- Soit le couple (x,y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que : $px + y^{p-1} = 2017$

0.25 a) Vérifier que : $p < 2017$

0.5 b) Montrer que : p ne divise pas y

0.75 c) Montrer que : $y^{p-1} \equiv 1[p]$ et en déduire que p divise 2016

0.5 d) Montrer que : $p = 7$

1 2- Déterminer, suivant les valeurs de p ,les couples (x,y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant:

$$px + y^{p-1} = 2017$$

EXERCICE 4:(10 points)

Partie1 : On considère la fonction numérique f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(0)=0 \text{ et } (\forall x \in]0,+\infty[) \quad f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

(on prend : $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 2cm$)

0.25 1-a) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0

0.5 b) Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0

0.5 c) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour tout x dans l'intervalle $]0,+\infty[$

0.5 2- a)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 b) Donner le tableau de variation de la fonction f

0.75 3- a) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

0.5 b) Tracer la courbe (C) (On prend : $f(1)\simeq 0,7$ et $4e^{-3}\simeq 0,2$)

<u>Partie2</u> : On considère la fonction numérique F définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$$

0.25 1-Montrer que la fonction F est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$

0.5 2-a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in]0,+\infty[)\quad \int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt$$

0.25 b) Déterminer $\displaystyle\int_x^1 \left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt$ pour tout x de $]0,+\infty[$

0.5 c) Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = e^{-1}$

0.5 3-Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations : $x=0$, $x=2$ et $y=0$

4- On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_n = F(n) - F(n+2)$

0.5 a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout entier naturel n, il existe un réel v_n de l'intervalle $]n,n+2[$ tel que : $u_n = 2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{-\frac{1}{v_n}}$

0.25 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\quad 2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}$

0.25 c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Partie3 :

0.5 1-a)Montrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe un nombre réel strictement positif unique a_n tel que : $f(a_n)=e^{-\frac{1}{n}}$

0.25 b) Montrer que la suite numérique $(a_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

0.25 c) Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad -\frac{1}{a_n}+\ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=-\frac{1}{n}$

0.25 2-a)Montrer que : $(\forall t\in[0,+\infty[)\quad 1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1-t+t^2$

0.5 b) Montrer que : $(\forall x\in[0,+\infty[)\quad -\frac{x^2}{2}\leq -x+\ln(1+x)\leq -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

3- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4

0.5 a) Vérifier que : $a_4\geq 1$, en déduire que $a_n\geq 1$ (On admettra que : $e^{\frac{3}{4}}\geq 2$)

0.5 b) Montrer que : $1-\frac{2}{3a_n}\leq\frac{2a_n^2}{n}\leq 1$.

(On pourra utiliser les questions 1-c) et 2-b) de la partie 3)

0.5 c) Montrer que : $\sqrt{\frac{n}{6}}\leq a_n$ (On pourra utiliser les questions 3-a) et 3-b)),

en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

0.5 d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\sqrt{\frac{2}{n}}$

FIN