Baccalauréat Sciences expérimentales

Sujet 4 2024

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences expérimentales (SVT) & (PC)**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

Ce sujet comporte 5 exercices :

Exercice 1 :

1 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$.

2 - Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points $A(a = \frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})$, $B(b = 2i)$ et $\Omega(\omega = i)$, et soit r la rotation de centre ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Montrer que $r(A) = O$ et que $r(Q) = B \iff q = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$.

b) Montrer que $AOQB$ est un parallélogramme.

c) Calculer $\arg\left(\dfrac{a-b}{a}\right)$ puis déduire que $AOQB$ est un rectangle.

3 - On considère le nombre complexe $d = 2\sqrt{3}(1-i)q$.

a) Montrer que $|d| = 6\sqrt{2}$ et que $\arg(d) \equiv \frac{-\pi}{4} + \arg(q)[2\pi]$.

b) Vérifier que $\arg(q) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$, puis déduire que $d = 6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

c) Montrer que $d = 3\Big((\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)\Big)$ et donner la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{7u_n + 4}{2u_n + 5} \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$

1 - Montrer par récurrence que $\forall n \geq 0 : u_n > 2$.

2 - a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{2(u_n+1)(2-u_n)}{2u_n+5}$.

b) Donner la monotonie de (u_n) en déduire qu'elle est convergente.

3 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$

a) Montrer que (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$.

b) Calculer v_0 et donner v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Déterminer la limite de (v_n), en déduire la limite $\lim(u_n)$.

4 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \ln(u_n - 1)$. Montrer que (w_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3

Partie 1 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$.

1 - Calculer les limites $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2 - Donner les variations de g sur $\mathbb{R}$.

3 - En déduire que $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 1$.

Partie 2 Soit f la fonction définie par :$f(x) = \dfrac{2x}{x - e^x}$, et (C_f) sa courbe representative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1 - Vérifier que $D_f = \mathbb{R}$.

2 - a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $\quad f(x) = \dfrac{2}{1 - \frac{e^x}{x}}$

b) Calculer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et donner l'interprétation géométrique du résultat.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ puis déduire la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinnage de $-\infty$.

3 - a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$: $\quad f'(x) = \dfrac{2(x-1)e^x}{(x-e^x)^2}$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) Montrer que $(\Delta) : y = -2x$ est la tangente à (C_f) au point O.

4 - Construire (C_f) et (Δ) dans le meme repère. (On donne $f(1) = \frac{1}{1-e} \approx -1.16$)

5 - Soit h la réstriction de f sur $]-\infty, 0]$.

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur J à déterminer.

b) Construire $(C_{h^{-1}})$ dans le meme repère.

6 - Soit S la surface du domaine limité par (C_f), les axes du repère et la droite d'équation $x = 1$.

a) Montrer que $\forall x \in [0,1]$: $\quad \dfrac{2}{1-e} \leq f(x) \leq -2xe^{-x}$.

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_0^1 2xe^{-x}dx = 2 - \frac{4}{e}$.

c) En déduire que $2 - \frac{4}{e} \leq S \leq \frac{2}{e-1}$.

Exercice 4

Lespace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considèrele plan (P) déquation $x+y+z+4=0$, et la sphère (S) de centre $\Omega(1,-1,-1)$ et de rayon $r = \sqrt{3}$.

1 - a) Calculer la distance $d(\Omega, (P))$ et en déduire que le plan (P) est tangent à la sphère (S).

b) Déterminer le point d'intersection de (P) et (S).

2 - On considère les deux points $A(2,1,1)$ et $B(1,0,1)$.

a) Vérifier que $\vec{n} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ est normale au plan OAB, et en déduire que $(OAB) : x - y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (OAB).

c) Montrer que (Δ) coupe la sphère (S) en déterminera les points d'intersection.

Exercice 5

Une entreprise fabrique des stylos. les controles de qualité ont montré que 75% des stylos sont conformes aux normes.

Un test accepte 10% des stylos non conformes et rejette 4% des stylos conformes. On choisit au hasard un stylo fabriqué par l'entreprise. On considère les événements A" : Le stylo est accepté." C : "Le stylo est conforme".

1 - Construire un arbre pondéré qui traduit l'énoncé.

2 - Montrer que $p(A) = 0.745$ et donner $p_A(\bar{C})$.

3 - On controle 10 stylos. Donner la probabilité d'avoir 3 stylos accéptés.

FIN.