

Exercice ①

Soit f une fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + x & x \leq -2 \\ f(x) = \sqrt[3]{x + 10} - 4 & x > -2 \end{cases}$$

- 1 – Donner Df .
- 2 – Calculer $\lim_{+\infty} f$ et $\lim_{-\infty} f$.
- 3 – Étudier la continuité de f sur Df .
- 4 – Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en $x_0 = -2$. Donner une interprétation géométrique.
- 5 – Soit g la restriction de f sur $I =] - \infty, -2[$.
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur J qu'on déterminera.
 - b) Calculer $g^{-1}(x)$.
- 6 – Soit h la restriction de f sur $I' =] -2, +\infty[$.
 - a) Montrer que h admet une fonction réciproque définie sur J' qu'on déterminera.
 - b) Calculer $h^{-1}(x)$.

Exercice ②

Soit $f(x) = x^3 - 3x - 3$

- 1 – Étudier les variations de f sur $[1, +\infty[$.
- 2 – Montrer que $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha : 2 < \alpha < 3$.
- 3 – Soit g la restriction de f sur $[1, +\infty[$.
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur J qu'on déterminera.
 - b) Montrer que g^{-1} est dérivable en $x_0 = 0$.
 - c) Montrer que $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2 - 1)}$.



Exercice ③

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - x + 1$

- 1 – Déterminer Df .
- 2 – Calculer $\lim_{+\infty} f$ et $\lim_{-\infty} f$.
- 3 – Étudier la continuité de f sur Df .
- 4 – a) Étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$. Interpréter.
b) Étudier la dérivabilité de f à gauche en -3 . Interpréter.
- 5 – Étudier les branches infinies.
- 6 – a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in Df - \{-3, 0\}$.
b) Montrer que f est strictement décroissante sur $] -\infty, -3]$.
c) Montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
d) Dresser le tableau de variation de f .
- 7 – Construire (Cf) dans un R.O.N.
- 8 – Soit g la restriction de f sur $I =] -\infty, -3]$.
a) Montrer que g admet une fonction réciproque en précisant son ensemble de définition et son ensemble de valeurs.
b) Construire (Cg^{-1}) dans le même repère.
c) Calculer $g^{-1}(x)$.

Exercice ④

$$\text{Soit : } \begin{cases} f(x) = 1 + x - \sqrt{x^2 - 4} & x \geq 2 \\ f(x) = x + 2 - \frac{2}{x} & x < 2 \end{cases}$$

- 1 – Déterminer Df et calculer les limites aux bornes de Df .
- 2 – Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 2. Interprétez.
- 3 – Étudier les branches infinies.
- 4 – Étudier les variations de f .
- 5 – Dresser le tableau de variation de f .
- 6 – Construire (Cf) .

Exercice ⑤

$$\text{Soit : } \begin{cases} f(x) = x - 1 + \frac{1}{x} & x < 1 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1} & x \geq 1 \end{cases}$$

- 1 – Déterminer Df et calculer les limites aux bornes de Df .
- 2 – Étudier la continuité de f en $x_0 = 1$.
- 3 – Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en $x_0 = 1$. Donner une interprétation géométrique.
- 4 – Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variation.
- 5 – Étudier les branches infinies.
- 6 – Construire (Cf) .
- 7 – Soit g la restriction de f sur $I = [1, +\infty[$.
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur J à déterminer.
 - b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$ et dresser son tableau de variation.
 - c) Construire (Cg^{-1}) dans le même repère.

Exercice ⑥

$$\text{Soit : } f(x) = x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

- 1 – Déterminer Df .
- 2 – Calculer $\lim_{0^+} f$. Donner une interprétation géométrique.
- 3 – Calculer $\lim_{+\infty} f$ et étudier la branche infinie au voisinage de $+\infty$.
- 4 – Étudier la position de (Cf) et la droite d'équation $y = x$.
- 5 – Montrer que $(\forall x > 0) \quad f'(x) = \frac{2x + \sqrt{x} + 1}{2x\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)$.
- 6 – Dresser le tableau de variation de f .
- 7 – Construire (Cf) .
- 8 – Soit g la restriction de f sur $I =]0, 1]$.
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle J à déterminer
 - b) Construire (Cg^{-1}) dans le même repère.

Exercice 7

$$\text{Soit : } \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} & x \geq 0 \\ f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x} & x < 0 \end{cases}$$

- 1 – Déterminer Df . Calculer $\lim_{+\infty} f$ et $\lim_{-\infty} f$.
- 2 – Étudier la continuité de f sur Df .
- 3 – Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en $x_0 = 0$. Donner une interprétation géométrique.
- 4 – Étudier les branches infinies.
- 5 – Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variation.
- 6 – Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \left[\frac{5}{4}, 2\right]$ qui vérifie $f(\alpha) = \alpha$.
- 7 – Tracer (Cf) .
- 8 – Soit g la restriction de f sur $]1, +\infty[$.
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque.
 - b) Montrer que $g^{-1}(\alpha) = g(\alpha)$.
 - c) Tracer (Cg^{-1}) dans le même repère.
 - d) Calculer $g^{-1}(x)$.
 - e) Montrer que $(g^{-1})'(\alpha) = \frac{-\alpha(\alpha-1)^3}{\alpha+1}$.

Exercice 8

$$\text{Soit : } f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + |x|}}$$

- 1 – Étudier la parité de f .
- 2 – Calculer $\lim_{0^+} f$ et $\lim_{+\infty} f$.
- 3 – Montrer que $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à (Cf) au voisinage de $+\infty$.
- 4 – Étudier les variations de f sur $]0, +\infty[$ puis dresser le tableau de variation sur Df .
- 5 – Construire (Cf) .

Exercice 9

$$\text{Soit : } \begin{cases} f(x) = \frac{x^3+1}{x^3-1} & x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2-x} - x & x \geq 1 \end{cases}$$

- 1 – Déterminer Df et calculer $\lim_{+\infty} f$ et $\lim_{-\infty} f$.
- 2 – Étudier la continuité de f en $x_0 = 1$.
- 3 – Étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 1$. Interprétez.
- 4 – Étudier les branches infinies.
- 5 – Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variation.
- 6 – Donner l'équation de la tangente à (Cf) au point d'abscisse 0.
- 7 – Construire (Cf) dans un R.O.N.
- 8 – Soit g la restriction de f sur $] -\infty, 1[$.
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur J .
 - b) Comparer $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(1)$.
 - c) Construire (Cg^{-1}) dans le même repère.
 - d) Calculer $g^{-1}(x)$.

Exercice 10

$$\text{Soit : } \begin{cases} f(x) = 3\sqrt[3]{x} - x & x > 0 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2 - x} & x \leq 0 \end{cases}$$

- 1 – Déterminer Df et calculer les limites aux bornes.
- 2 – Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$. Interprétez.
- 3 – Étudier les branches infinies.
- 4 – Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variation.
- 5 – Étudier la position de (Cf) et (D) : $y = -x$ sur $]0, +\infty[$.
- 6 – Étudier la position de (Cf) et (Δ) : $y = \frac{1}{2}$ sur $] -\infty, 0]$.
- 7 – Tracer (Cf) .
- 8 – Soit g la restriction de f sur $]1, +\infty[$.
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque.
 - b) Tracer (Cg^{-1}) dans le même repère.
 - c) Donner le tableau de variation de g^{-1} .



Exercice 11

Soit : $f(x) = (x\sqrt{x} - 1)^2$

- 1 – Déterminer Df et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$.
- 2 – Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Donner une interprétation géométrique.
- 3 – Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Donner une interprétation géométrique.
- 4 – Montrer que $f'(x) = 3\sqrt{x}(x\sqrt{x} - 1)$ puis dresser le tableau de variation de f .
- 5 – a) Montrer que $(\forall x > 0) f''(x) = \frac{3(4x\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}}$.
b) Dédire la concavité de (Cf) et le point d'inflexion.
- 6 – a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [0,1]$.
b) Montrer que $\sqrt{\alpha} = \frac{1}{1+\alpha}$.
- 7 – Construire (Cf) .
- 8 – Soit g la restriction de f sur $I = [0,1]$.
a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur J à déterminer.
b) Construire (Cg^{-1}) dans le même repère.
c) Calculer $g^{-1}(x)$.

Exercice 12

Soit : $f(x) = x\sqrt{x^2+1} - x^2$

- 1 – Déterminer Df et calculer les limites aux bornes.
- 2 – Étudier les branches infinies.
- 3 – Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)^2}{\sqrt{x^2+1}}$ puis dresser le tableau de variation de f .
- 4 – Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \leq x$. Donner une interprétation géométrique.
- 5 – Construire.
- 6 – a) Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle J qu'on déterminera.
b) Construire (Cf^{-1}) dans le même repère.
c) Montrer que $(\forall x \in J) f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

Exercice 13

$$\text{Soit : } \begin{cases} f(x) = \sqrt{2x} - x & x \geq 0 \\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - x + 3}} & x < 0 \end{cases}$$

- 1 – Déterminer Df .
- 2 – Étudier la continuité de f sur Df .
- 3 – Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en $x_0 = 0$. Donner une interprétation géométrique.
- 4 – Calculer les limites aux bornes.
- 5 – Étudier les branches infinies.
- 6 – a) Montrer que
$$\begin{cases} (\forall x > 0) & f'(x) = \frac{1-2x}{(1+\sqrt{2x})\sqrt{2x}} \\ (\forall x < 0) & f'(x) = \frac{6-x}{2\sqrt{x^2-x+3}} \end{cases}$$

b) Dresser le tableau de variation de f .
- 7 – Montrer que $(\forall x \geq 0) \quad f(x) - x = \frac{\sqrt{2x}(1-2x)}{1+\sqrt{2x}}$.
- 8 – En déduire la position de (Cf) et la droite $(D): y = x$ sur $[0, +\infty[$.
- 9 – Donner l'équation de la tangente à (Cf) au point $A(2, f(2))$.
- 10 – Construire (Cf) .
- 11 – Soit g la restriction de f sur $I = [\frac{1}{2}, +\infty[$.
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur J .
 - b) Construire (Cg^{-1}) dans le même repère.
 - c) Montrer que g^{-1} est dérivable en 0.
 - d) Calculer $(g^{-1})'(0)$.
 - e) Montrer que $g^{-1}(x) = 1 - x + \sqrt{1 - 2x}$