



Exercice ①

Soit :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

On pose $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

- 1 – Montrer que (v_n) est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
- 2 – Ecrire (v_n) puis (u_n) en fonction de n .
- 3 – Calculer $\lim(u_n)$.
- 4 – Calculer $S_n = v_0 + \dots + v_n$.

Exercice ②

Soit :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{9u_n + 9}{2u_n + 6} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

- 1 – Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \neq 3$
- 2 – On pose $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = \frac{2u_n + 3}{2u_n - 6}$.
 - a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
 - b) Calculer (u_n) en fonction de n .
 - c) Calculer $\lim(u_n)$.
 - d) Calculer $S_n = v_0 + \dots + v_{n+1}$.

Exercice ③

Soit :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{10}{3} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 3u_n + 9}{u_n} \end{cases}$$

- 1 – Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 3$
- 2 – Etudier la monotonie de (u_n) .
- 3 – a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{3}(u_n - 3)$.
 - b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n - 3 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
 - c) Calculer $\lim u_n$.



Exercice ④

Soit :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{(1+u_n)^2}{2} \end{cases}$$

- 1 – Montrer que (u_n) est croissante.
- 2 – a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n \geq \frac{5}{2}$.
b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq 2 + \frac{5n}{2}$.
c) Calculer $\lim u_n$.

Exercice ⑤

Soit :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{4-u_n^2}{3-u_n^2}} \end{cases}$$

- 1 – Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n \leq \sqrt{2}$.
- 2 – Montrer que (u_n) est croissante.
- 3 – On pose : $v_n = \frac{2}{2-u_n^2}$.
 - a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique. Préciser sa raison.
 - b) Calculer $\lim u_n$

Exercice ⑥

Soit :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$$

- 1 – Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n \leq 4$.
- 2 – Etudier la monotonie de (u_n)
- 3 – Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.
- 4 – En déduire $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 4 - u_n \leq 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ puis calculer $\lim u_n$.

Exercice ⑦

Soit (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{u_n^2 + 1} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

- 1 – Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq u_n \leq 2$.
- 2 – Montrer que (u_n) est décroissante.
- 3 – Calculer $\lim u_n$.



Exercice 8

Soit (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n+5} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{5}{u_n}$

1 – Montrer que (v_n) est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

2 – Calculer (u_n) en fonction de n puis $\lim u_n$.

3 – Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ puis $T_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$.

Exercice 9

Soit (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{2u_n+7} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$

1 – Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

2 – Etudier la monotonie de (u_n) .

3 – a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{8} \left(u_n - \frac{1}{2} \right)$.

b) Dédire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n - \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{3n+1}$.

c) Dédire $\lim u_n$.

Exercice 10

Soit (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n+2}{u_n+5} \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2} \quad (n \in \mathbb{N})$

1 – Montrer que (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

2 – Calculer $\lim u_n$.

3 – Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

4 – $T_n = v_0 v_1 \dots v_n$.

Exercice 11

Soit (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{6u_n+4}{u_n+6} \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n-2}{u_n+2} \quad (n \in \mathbb{N})$

1 – Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq 2$.

2 – Etudier la monotonie de (u_n)

3 – Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

4 – Ecrire (u_n) en fonction de n puis $\lim u_n$.

5 – Calculer : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n+1}$ et $P_n = v_1 v_2 \dots v_n$.



Exercice 12

Soit (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n}{4-u_n} \end{cases}$ et $v_n = \frac{3u_n+2}{u_n}$

- 1 – Calculer u_1 et u_2 et déduire que (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
- 2 – Montrer que (v_n) est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
- 3 – Calculer (v_n) en fonction de n puis $\lim u_n$.
- 4 – Calculer : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-2}$.
- 5 – Calculer : $T_n = \frac{2}{u_0} + \frac{2}{u_1} + \dots + \frac{2}{u_{n-2}}$.

Exercice 13

On considère la fonction $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

- 1 – Etudier les variations de f .
- 2 – Soit $I = [0,1]$ Montrer que $f(I) \subset I$.
- 3 – On considère la suite : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$
 - a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_n < 1$.
 - b) Etudier les variations de (u_n) . En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq \frac{1}{2}$.
 - c) Calculer $\lim u_n$.
- 4 – a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 - u_{n+1} \leq \frac{2}{5}(1 - u_n)$.
 - b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$.
 - c) Calculer $\lim u_n$.

Exercice 14

On considère la suite : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n+2}{u_n+5} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ et $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

- 1 – Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad -2 < u_n < 1$.
- 2 – Etudier la monotonie de (u_n) .
- 3 – a) Montrer que (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
 - b) Calculer $\lim v_n$.
 - c) Calculer : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ puis $\lim S_n$.
- 4 – a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(1 - u_n)$.
 - b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 - u_n \leq 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
 - c) Calculer $\lim u_n$.

Exercice 15

On considère la suite : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

- 1 – Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2 \leq u_n \leq 3$.
- 2 – Etudier la monotonie de (u_n) .
- 3 – a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3 - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(3 - u_n)$.
b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3 - u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
c) Calculer $\lim u_n$.

Exercice 16

Soit la fonction : $f(x) = x^2 - 3x + 4$

- 1 – Etudier les variations de f .
- 2 – On pose $I = [1, 2]$ Montrer que $f(I) \subset I$.
- 3 – Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad f(x) \geq x$
- 4 – Soit : $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
 - a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq u_n \leq 2$.
 - b) Etudier les variations de (u_n) .
 - c) Calculer $\lim u_n$.

Exercice 17

On considère la suite : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^3}{1+u_n^2} \end{cases}$

- 1 – Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 0$.
- 2 – Etudier la monotonie de (u_n) .
- 3 – En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$.
- 4 – a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.
b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ puis calculer $\lim u_n$.
c) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_0 u_1 \dots u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$



Exercice 18

On considère la suite : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{3} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$

1 – Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n \leq 1$.

2 – Etudier la monotonie de (u_n) .

3 – a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(1 - u_n)$.

b) Dédurre que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 - u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

c) Calculer $\lim u_n$.

Exercice 19

On considère la suite : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$

1 – Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2 \leq u_n \leq 4$.

2 – Etudier la monotonie de (u_n) .

3 – a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

b) Dédurre que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

c) Calculer $\lim u_n$.

4 – Soit $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad S_n \geq 4n - 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

b) Calculer $\lim S_n$.

Exercice 20

Calculer la limite des suites suivantes :

1 – $u_n = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n$

2 – $\frac{2^n}{5^n}$

3 – $\frac{3^n - 7^n}{3^n + 7^n}$