



Exercice ①

Simplifier :

$$A = \ln\sqrt{2 + \sqrt{2}} + \ln\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$B = \ln 2 + \ln(2 + \sqrt{2}) + \ln(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \ln(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})$$

$$C = \ln(a^2 - 1) + \ln(b^2 - 1) - \ln((ab + 1)^2 - (a + b)^2) \quad (a > 1 \text{ et } b > 1)$$

Exercice ②

Soit $a > 0$ et $b > 0$

Calculer $\frac{a}{b}$ sachant que $\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$

Exercice ③

Soit $a > 0$ et $b > 0$

Montrer que $\frac{\ln a + \ln b}{2} \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Exercice ④

Déterminer Df

1 - $f(x) = \frac{7}{\ln x}$

2 - $f(x) = \frac{\ln x + 2x}{\ln x - 1}$

3 - $f(x) = \sqrt{\ln x}$

4 - $f(x) = \sqrt{9 - 4\ln^2 x}$

5 - $f(x) = \ln(\ln x)$

6 - $f(x) = \sqrt{\frac{7 - \ln x}{8 + \ln x}}$

7 - $f(x) = \frac{\ln(x-2)}{\ln(x+1)}$

8 - $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)$

Exercice ⑤

Résoudre dans $\mathbb{R}$

1 - $\ln(3x - 4) + \ln(7x + 1) = \ln 9$

2 - $2\ln(2x - 1) - 3\ln(x + 1) = 0$

3 - $\ln(x^2 - x + 1) \geq \ln x$

4 - $\ln(x^2 - 3x + 3) \leq 0$

5 - $\ln(x + 1) + \ln(4 - x) > 0$

6 - $\ln|x - 2| \leq 1$

7 - $\ln^2 x - 5\ln x + 6 = 0$

8 - $\ln^2 x + \ln x - 2 \geq 0$

Exercice ⑥

Calculer :

$$1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 - 4 \ln x$$

$$3 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} + \ln x$$

$$5 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln x}{x + \ln x}$$

$$7 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x + 7 \ln x}{\ln x + 1}$$

$$9 - \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) \ln(x^2 - 1)$$

$$11 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$$

$$13 - \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln^4 x$$

$$15 - \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^3 x$$

$$17 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$19 - \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x}{x-3} \right)$$

$$21 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^3 + 7x}$$

$$23 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 3)}{x}$$

$$25 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x + 4}$$

$$27 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x^3}$$

$$29 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x)}{x}$$

$$31 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(7x + 3) - \ln(3x - 2)$$

$$33 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + x + 1) - x$$

$$2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x - \ln x$$

$$4 - \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \ln \left(\frac{3-2x}{x+1} \right)$$

$$6 - \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2 - x \ln x$$

$$8 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 4x}{2 \ln x - x}$$

$$10 - \lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln(x^2 - x)$$

$$12 - \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x$$

$$14 - \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln^2 x$$

$$16 - \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(\frac{x}{x+2} \right)$$

$$18 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x}$$

$$20 - \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)$$

$$22 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{x^4 + 7x^2}$$

$$24 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{x}$$

$$26 - \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 3 \ln(x - 4)$$

$$28 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 3x + 1)}{x}$$

$$30 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} \ln \left(\frac{1+2x}{1-2x} \right)$$

$$32 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln x$$

Exercice ⑦

I. Soit $g(x) = x + 2 - \ln x$

- 1 – Calculer $\lim_{0^+} g$ et $\lim_{+\infty} g$.
- 2 – Calculer $g'(x)$.
- 3 – Dresser le tableau de variation de g .
- 4 – Dédire que $(\forall x > 0) \quad g(x) \geq 3$.

II. Soit $f(x) = \sqrt{x} + \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

- 1 – Donner Df .
- 2 – Calculer $\lim_{0^+} f$. Donner une interprétation géométrique.
- 3 – a) Calculer $\lim_{+\infty} f$.
b) Etudier la branche infinie au voisinage de $+\infty$
- 4 – a) Montrer que $(\forall x > 0) \quad f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.
b) Dresser le tableau de variation de f .
- 5 – a) Calculer $f''(x)$ et vérifier que $f''(x) = \frac{h(x)}{4x^2\sqrt{x}}$ avec $h(x) = -3g\left(\frac{x}{3}\right) - 2 + 3\ln 3$
b) Déterminer le signe de $h(x)$
c) Dédire le signe de $f''(x)$ puis la concavité de (Cf)
- 6 – Construire (Cf) .

Exercice ⑧

Soit $f(x) = \frac{1+\ln x}{x \ln^2 x}$

- 1 – Donner Df .
- 2 – a) Calculer $\lim_{+\infty} f$ et $\lim_1 f$.
b) Montrer que $\lim_{0^+} f = -\infty$.
- 3 – a) Calculer $f'(x)$.
b) Montrer que le signe de $f'(x)$ est celui de $-\ln x$.
c) Dresser le tableau de variation de f .

Exercice 9

Soit $f(x) = \frac{1 + \ln^2 x}{x}$

- 1 – Donner Df .
- 2 – Calculer $\lim_{0^+} f$. Donner une interprétation géométrique.
- 3 – a) Montrer que $(\forall x > 0) \quad f(x) = \frac{1}{x} + 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$.
b) Calculer $\lim_{+\infty} f$. Donner une interprétation géométrique.
- 4 – Montrer que $(\forall x > 0) \quad f'(x) = - \left(\frac{\ln x - 1}{x} \right)^2$.
- 5 – Dresser le tableau de variation de f .
- 6 – Montrer que (Cf) admet deux points d'inflexion qu'on déterminera.
- 7 – Construire (Cf) .

Exercice 10

Soit f une fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1 – Etudier la continuité de f à droite en $x_0 = 0$.
- 2 – Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Donner une interprétation.
- 3 – Montrer que $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et étudier la branche infinie au voisinage de $+\infty$.
- 4 – a) Montrer que $f'(x) = \ln^2 x$.
b) Dresser le tableau de variation de f .
- 5 – Donner l'équation de la tangente à (Cf) en $x_0 = e$.
- 6 – Montrer que $(\forall x > 0) \quad f(x) - x = x(\ln x - 1)^2$.
- 7 – Etudier la position de (Cf) et la droite $(\Delta): y = x$.
- 8 – Construire (Cf) .
- 9 – Soit la suite :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$
 - a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 < u_n < e$.
 - b) Etudier la monotonie de u_n .
 - c) Calculer $\lim u_n$.

Exercice 11

I. Soit $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$

1 – Calculer $\lim_{+\infty} g$ et $\lim_{0^+} g$.

2 – Montrer que $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ et dresser le tableau de variation de g .

3 – Calculer $g(1)$ et déduire le signe de $g(x)$.

II. Soit $f(x) = 1 - x \ln^2 x$

1 – Calculer $\lim_{+\infty} f$ et $\lim_{0^+} f$.

2 – Montrer que $f'(x) = -\ln x (\ln x + 2)$. Dresser le tableau de variation de f .

3 – Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $2 < \alpha < e$

4 – Déduire le signe de $f(x)$.

I. Soit $h(x) = x + \frac{1}{x} - \ln^2 x$

1 – Calculer $\lim_{+\infty} f$ et déduire la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

2 – Montrer que $\lim_{0^+} f = +\infty$. Donner une interprétation géométrique.

3 – Montrer que $(\forall x > 0) h'(x) = \frac{g(x)}{x}$ et dresser le tableau de variation de h .

4 – a) Vérifier que $h(x) - x = \frac{f(x)}{x}$.

b) Déduire la position de (C_h) et la droite d'équation $(\Delta): y = x$.

5 – Tracer (C_h) .

6 – Soit la suite : $\begin{cases} u_0 = e \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$

a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n > \alpha$.

b) Étudier la monotonie de u_n .

c) Calculer $\lim u_n$.



Exercice 12

Soit f une fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x(1 - \ln x) & x > 0 \\ f(x) = x + x(1 - x) & x \leq 0 \end{cases}$$

- 1 – Déterminer Df
- 2 – Étudier la continuité de f en $x_0 = 0$.
- 3 – Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en $x_0 = 0$. Donner une interprétation géométrique.
- 4 – Montrer que $\lim_{-\infty} f = -\infty$ puis étudier la branche infinie au voisinage de $-\infty$.
- 5 – Étudier la branche infinie au voisinage de $+\infty$.
- 6 – a) Montrer que :
$$\begin{cases} (\forall x > 0) & f'(x) = -\ln x \\ (\forall x < 0) & f'(x) = \frac{-x}{1-x} \end{cases}$$

b) Dresser le tableau de variation de f .
- 7 – Résoudre dans $]0, +\infty[$: $f(x) > x$.
- 8 – Construire (Cf) .
- 9 – Soit la suite :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{e} \\ u_{n+1} = u_n - u_n \ln u_n \end{cases}$$

a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_n < 1$.
b) Étudier la monotonie de u_n .
c) Calculer $\lim u_n$.

Exercice 13

I. Soit $g(x) = x \ln x - (x + 1) \ln(x + 1)$

- 1 – Calculer $\lim_{0^+} g$ puis étudier les variations de g .
- 2 – Démontrer que $(\forall x > 0) \quad g(x) < 0$.

II. Soit $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$

- 1 – Déterminer Df et calculer les limites aux bornes de Df .
- 2 – Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variation de f .
- 3 – Construire (Cf) .

Exercice 14

I. Soit $g(x) = x - 1 - \ln x$

- 1 – Déterminer Dg et calculer les limites aux bornes.
- 2 – Étudier les variations de g et dresser le tableau de variation de g .
- 3 – Calculer $g(1)$ et déduire le signe de $g(x)$.

II. Soit
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{2} - x \ln x & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1 – Étudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$. Donner une interprétation géométrique.
- 2 – Calculer $\lim_{+\infty} f$.
- 3 – Étudier la branche infinie de (Cf) .
- 4 – Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variation de f .
- 5 – Construire (Cf) .

Exercice 15

I. Soit $g(x) = x - 2(x+1)\ln(x+1)$ définie sur $[0, +\infty[$

- 1 – Montrer que $\lim_{+\infty} g = -\infty$.
- 2 – a) Étudier les variations de g .
b) En déduire que $(\forall x > 0) \quad g(x) < 0$.

II. Soit $f(x) = \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x}$

- 1 – Déterminer Df .
- 2 – Montrer que $\lim_{0^+} f = +\infty$. Donner une interprétation géométrique.
- 3 – Montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$. Donner une interprétation géométrique.
- 4 – Montrer que $(\forall x > 0) \quad f'(x) = \frac{g(\sqrt{x})}{2x^2(1+\sqrt{x})}$.
- 5 – Dresser le tableau de variation de f .
- 6 – Construire (Cf) .

Exercice 16

I. Soit $g(x) = x - 1 + 2\ln x$

1 – Etudier les variations de g et dresser le tableau de variation de g .

2 – Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de $g(x)$.

II. On considère $\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad x > 0$

1 – Montrer que f est continue à droite en $x_0 = 0$.

2 – Etudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$. Interpréter.

3 – Calculer $\lim_{+\infty} f$ puis déterminer la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

4 – a) Montrer que $(\forall x > 0) \quad f'(x) = x g\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

5 – Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0, +\infty[$ et que $1 < \alpha < 2$.

6 – a) Montrer que $f(x) > x \Leftrightarrow x \in]0, 1[$.

b) Dédire la position de (Cf) et la droite d'équation $(\Delta): y = x$.

7 – Construire (Cf) .

III. Soit la suite : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \ln u_n \end{cases}$

1 – Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_n < 1$.

2 – Etudier la monotonie de u_n et calculer $\lim u_n$.

Exercice 17

Soit $f(x) = 2\ln|x - 1| + \ln(2x + 1)$

1 – Déterminer Df .

2 – Résoudre dans Df : $f(x) = 0$.

3 – Calculer les limites aux bornes de Df .

4 – Etudier les variations de f puis dresser le tableau de variation de f .

5 – Etudier les branches infinies.

6 – Construire (Cf) .



Exercice (18)

Soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - x \ln x & x > 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = x + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) & x < 0 \end{cases}$$

- 1 – Déterminer Df .
- 2 – Calculer $\lim_{+\infty} f$, $\lim_{-\infty} f$ et $\lim_{0^-} f$.
- 3 – Étudier la continuité de f sur Df .
- 4 – Étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$. Interpréter.
- 5 – Étudier les branches infinies de (Cf) .
- 6 – Étudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f .
- 7 – Donner l'équation de la tangente à (Cf) au point d'abscisse e .
- 8 – Construire (Cf) dans R.O.N.
- 9 – Soit g la restriction de f sur $I = [1, +\infty[$.
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.
 - b) Construire dans le même repère (Cg^{-1}) .
- 10 – Soit la suite : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{e} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
 - a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ 0 < u_n < 1$.
 - b) Étudier les variations de u_n .
 - c) Calculer $\lim u_n$.

Exercice (19)

I. Soit $g(x) = 1 - x + \ln x$

Étudier les variations de g puis déduire le signe de $g(x)$.

II. Soit $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \ln x - x & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

- 1 – Étudier la continuité et la dérivabilité à droite en $x_0 = 0$.
- 2 – Calculer $\lim_{+\infty} f$ et étudier la branche infinie au voisinage de $+\infty$.
- 3 – Montrer que $(\forall x > 0) \ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} g\sqrt{x}$ puis dresser le tableau de variation de f . Construire (Cf) .