



Exercice ①

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$1 - e^{7x+4} = 5$$

$$3 - e^{4x-1} = e^{1-2x}$$

$$5 - \frac{e^{-x}-3}{e^{2x}-1} > 0$$

$$7 - |e^{x+1} - 3| < 2$$

$$2 - e^{x^2-3x} = 1.$$

$$4 - e^x + e^{1+x} - e = 1$$

$$6 - 3e^x - 2e^{-x} + 1 \leq 0.$$

$$8 - 2e^{2x} + 5e^x - 3 > 0$$

Exercice ②

Calculer :

$$1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - e^x$$

$$3 - \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

$$5 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 3}{e^x + 1}$$

$$7 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-x}}{x}$$

$$9 - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

$$11 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{x - 2}$$

$$13 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} e^x$$

$$15 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{e^x - 2x}$$

$$17 - \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 \ln x + e^x$$

$$19 - \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{e^x}$$

$$21 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$$

$$2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{3x}}{2x}$$

$$4 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3 + 1}$$

$$6 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x}$$

$$8 - \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{2x}$$

$$10 - \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2) e^x$$

$$12 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{e^{2x} - 1}$$

$$14 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x + x}$$

$$16 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{2x} - e^x}{e^x + 4}$$

$$18 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{\frac{x-1}{x}}$$

$$20 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

$$22 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x}$$

Exercice ③

Soit $f(x) = x(1 - e^{-x})$

- 1 – Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$.
- 2 – Étudier les branches infinies de (Cf) .
- 3 – a) Calculer $f'(x)$.
b) Montrer que $(\forall x > 0) \quad e^x - 1 + x > 0$ et $(\forall x < 0) \quad e^x - 1 + x < 0$.
c) Dresser le tableau de variation de f .
- 4 – Étudier la concavité de (Cf) .
- 5 – Étudier la position de (Cf) et $(\Delta): y = x$.
- 6 – Construire (Cf) .

Exercice ④

Soit f une fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1 – Étudier la parité de f .
- 2 – Étudier la continuité de f à droite en $x_0 = 0$.
- 3 – Étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$. Interprétez.
- 4 – Étudier la branche infinie de (Cf) au voisinage de $+\infty$.
- 5 – Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f sur Df .
- 6 – a) Montrer que $(\forall x < 0) f(x) > x$.
b) Construire (Cf) .
- 7 – Soit $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$
 - a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < 0$.
 - b) Montrer que u_n est croissante.
 - c) Calculer $\lim u_n$.

Exercice ⑤

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \ln x & x \geq 1 \\ f(x) = e^{\frac{x}{x-1}} & x < 1 \end{cases}$$

1 – Montrer que f est continue en $x_0 = 1$.

2 – a) Vérifier que $(\forall x < 1) \quad e^{\frac{x}{x-1}} = e \cdot e^{\frac{x}{x-1}}$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. Donner une interprétation

c) Etudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 1$. Interpréter

3 – Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f .

4 – Etudier les branches infinies.

5 – Résoudre dans $[1, +\infty[\quad f(x) \leq x$.

6 – Construire (Cf) (on admet que (Cf) a un seul point d'inflexion d'abscisse $\frac{1}{2}$).

Exercice ⑥

Soit f une fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x \ln x}{x-1} & x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\\ f(1) = 1 \\ f(x) = x^2 e^{-x} & x \leq 0 \end{cases}$$

1 – Déterminer Df et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$.

2 – Montrer que f est continue en 0 et 1.

3 – Etudier la dérivabilité de f en 0. Donner une interprétation géométrique (on admet que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1}{2}$).

4 – Montrer que
$$\begin{cases} (\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[) & f'(x) = \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2} \\ (\forall x < 0) & f'(x) = x(2-x)e^{-x} \end{cases}$$

5 – On considère $g(x) = x - 1 - \ln x$

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g$.

b) Etudier les variations de g et déduire le signe de $g(x)$.

6 – Dresser le tableau de variation de f .

7 – Etudier les branches infinies de (Cf) .

8 – Construire (Cf) .

Exercice ⑦

Soit f une fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} & x < 1 \\ f(x) = x-1 - \frac{\ln x}{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

1 – Déterminer Df et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$.

2 – Montrer que f est continue en $x_0 = 1$.

3 – Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$. Interpréter.

4 – a) Montrer que $(\forall x < 1) \quad f'(x) = \frac{x-2}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$.

b) Montrer que f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f .

5 – a) Montrer que $(D): y = x - 1$ est une asymptote à (Cf) au voisinage de $+\infty$.

b) Étudier la position de (Cf) et (D) sur $]1, +\infty[$.

c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = 0$. Donner une interprétation.

6 – Construire (Cf) (on admet que (Cf) est au dessous de $(\Delta): y = x$ sur $] -\infty, 1[$).

Exercice ⑧

Soit $f(x) = e^{2x} - 2e^x + 2$

1 – Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$.

2 – Étudier les branches infinies.

3 – a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = 2e^x(e^x - 1)$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

4 – Déterminer l'intersection de (Cf) et $y = 2$.

5 – Déterminer le point d'inflexion.

6 – Construire (Cf) .

Exercice ⑨

Soit f une fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = |2x(1 - \ln x)| & x > 0 \\ f(x) = e^x - 1 - 4\sqrt{1 - e^x} & x \leq 0 \end{cases}$$

- 1 – Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$.
- 2 – Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en $x_0 = 0$. Donner une interprétation.
- 3 – Etudier la continuité de f en e .
- 4 – Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en e . Donner une interprétation géométrique.
- 5 – Calculer $\lim_{+\infty} f$ et $\lim_{-\infty} f$.
- 6 – Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f .
- 7 – Etudier les branches infinies.
- 8 – Construire (Cf) .
- 9 – Soit g la restriction de f sur $I =] - \infty, 0]$
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur J à déterminer.
 - b) Tracer (Cg^{-1}) et dans le même repère.
 - c) Calculer $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

Exercice ⑩

Soit $f(x) = 4e^{-x} - e^{-2x}$

- 1 – Déterminer Df et calculer les limites aux bornes.
- 2 – Etudier les branches infinies.
- 3 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ $f(x) = 0$.
- 4 – Dresser le tableau de variation de f .
- 5 – Etudier la concavité de (Cf) .
- 6 – Construire (Cf) .

Exercice (11)

I. Soit $g(x) = x^2 - x + e^x$

1 – Calculer $\lim_{+\infty} g$ et $\lim_{-\infty} g$.

2 – Etudier les variations de g .

3 – En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}) \ g(x) > 0$.

II. Soit $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + e^x}$

1 – Montrer que $Df = \mathbb{R}$.

2 – Calculer $\lim_{+\infty} f$. Qu'en déduisez-vous ?

3 – Montrer que $\lim_{-\infty} f = 1$. Conclure.

4 – a) Montrer que $f'(x) = \frac{x(2-x)e^x}{(x^2 + e^x)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

5 – Montrer que $f(x) - x = \frac{-x g(x)}{x^2 + e^x}$. En déduire la position de (Cf) et $(\Delta): y = x$.

6 – Construire (Cf) ($f(2) \simeq 0,35$).

III. Soit : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$

a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n \geq 0$.

b) Etudier la monotonie de u_n .

c) Calculer $\lim u_n$.

Exercice 12

I. Soit $g(x) = x + e^{-x} - 1$

1 – Calculer $\lim_{+\infty} g$ et montrer que $\lim_{-\infty} g = +\infty$

2 – Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g .

3 – Dédurre que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x + e^{-x} > 1$.

II. Soit $f(x) = x + \ln(x + e^{-x})$

1 – Vérifier que $Df = \mathbb{R}$.

2 – a) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = \ln(1 + xe^x)$

b) Dédurre que $\lim_{-\infty} f = 0$. Donner une interprétation géométrique.

3 – a) Vérifier que $(\forall x > 0) \quad f(x) = x + \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{xe^x}\right)$

b) Calculer $\lim_{+\infty} f$.

c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = +\infty$.

d) Dédurre la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

4 – a) Calculer $f'(x)$.

b) Montrer que le signe de $f'(x)$ est celui de $x + 1$

c) Dresser le tableau de variation de f .

d) Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.

5 – Soit $(\Delta): y = x$.

a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) - x \geq 0$

b) Dédurre la position de (Cf) et (Δ) .

6 – Construire (Δ) et (Cf) .

7 – Calculer l'aire du domaine limité par (Cf) et la courbe de la fonction $x \rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{xe^x}\right)$ et $x = 1, x = e$.

III. Soit la suite u_n définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad -1 \leq u_n \leq 0$.

b) Montrer que u_n est croissante.

c) Calculer $\lim u_n$.