

Exercice ①

Calculer :

$$A = \int_0^1 (x^2 - 4x + 1) dx$$

$$B = \int_1^2 \frac{3x^2 + x - 1}{x^4} dx$$

$$C = \int_0^1 (e^{2x} - e^x) dx$$

$$D = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$E = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$F = \int_0^1 x\sqrt{3+x^2} dx$$

$$G = \int_0^1 \sqrt[3]{x} (x+1) dx$$

$$H = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

$$I = \int_{e^2}^e \frac{dx}{x \ln x}$$

$$J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$K = \int_0^1 \frac{x^2}{(x^3 + 1)^4} dx$$

$$L = \int_1^e \frac{(1 + \ln x)^2}{x} dx$$

$$M = \int_{-1}^3 |x^2 - 2x| dx$$

$$N = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin 2x \cos x dx$$

$$O = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{3 + \sin^2 x}} dx$$

$$P = \int_1^{\ln 3} \frac{e^x}{\sqrt[3]{e^x + 1}} dx$$

$$Q = \int_1^{e^2} \frac{1}{x} |1 - \ln x| dx$$

$$R = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$S = \int_{-1}^2 \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$T = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

$$U = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$$

$$V = \int_0^2 (x-2) \sqrt{x^2 - 4x + 5} dx$$

$$W = \int_0^3 \frac{1}{1 + e^x} dx$$



Exercice ②

Calculer :

$$A = \int_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx$$

$$C = \int_3^5 \frac{dx}{x^2 - 4}$$

$$B = \int_0^1 \frac{2x^3}{x^2 + 1} dx$$

$$D = \int_3^4 \frac{1}{x^2 + x - 2} dx$$

Exercice ③

Calculer :

$$A = \int_1^e (2x + 1) \ln x dx$$

$$D = \int_0^1 x \ln(x + 1) dx$$

$$B = \int_0^1 (x - 3)e^{2x} dx$$

$$E = \int_1^e \ln x dx$$

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

Exercice ④

1 – Déterminer a, b et c tels que :

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{1+x}$$

2 – Montrer que $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

3 – Calculer $J = \int_0^1 x \ln(1+x) dx$.

Exercice ⑤

Calculer :

$$A = \int_0^1 (x^2 + 1) e^x dx$$

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(x+1) \sin x}{\cos^3 x} dx$$



Exercice ⑥

1 – Vérifier que :

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}.$$

2 – Calculer $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$.

3 – En utilisant une intégration par partie. Calculer $J = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2} dx$.

Exercice ⑦

1 – Vérifier que :

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} = 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

2 – Calculer $I = \int_{-3}^0 \frac{x^2}{(x-1)^2} dx$.

Exercice ⑧

1 – Calculer : $I = \int_1^e x^2 \ln x dx$.

2 – Calculer : $J = \int_{-3}^{-2} \frac{1}{x^2 + x} dx$.

3 – Calculer : $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx$.

Exercice ⑨

1 – Vérifier que :

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}.$$

2 – Calculer $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^2(x+1)}$.

3 – Calculer $J = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(x+1)}{x^3} dx$.

Exercice ⑩

1 – Calculer : $I = \int_0^1 \frac{2x^2 + 3x + 2}{x+1} dx$.

2 – Calculer : $J = \int_0^1 x e^{-x} dx$.

3 – Calculer : $K = \int_{e^{-1}}^e \frac{1}{x} |\ln x| dx$.



Exercice 11

1 – Déterminer a et b tels que :

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

2 – Calculer : $I = \int_{-1}^0 \frac{x+1}{x^2-3x+2} dx$.

Exercice 12

On pose :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin 2x dx.$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \sin 2x dx$$

1 – Calculer $I + J$ et $I - J$.

2 – En déduire la valeur de I et J .

Exercice 13

Calculer:

$$A = \int_2^{-1} \left(t^2 + \frac{t}{3} - 3 \right) dt$$

$$B = \int_0^1 \frac{t^3}{t^2+5} dt$$

$$C = \int_1^4 t\sqrt{t} dt$$

$$D = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x+3} dx$$

$$E = \int_1^2 \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} dx$$

$$F = \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)}$$

$$G = \int_1^2 \left(2t^3 + \frac{4}{t} - \frac{3}{t^2} \right) dt$$

$$H = \int_0^2 \frac{x^3 - 6x^2 + x - 1}{x-3} dx$$

$$I = \int_4^5 \frac{x}{x-3} dx$$

$$J = \int_0^2 (e^x + x) dx$$

$$K = \int_0^{\pi} \cos x \sin^7 x dx$$

$$L = \int_0^{\ln 2} e^x \sqrt{1+e^x} dx$$

Exercice 14

Calculer :

$$A = \int_{-2}^{-1} \frac{2x^3 + 1}{x^2} dx$$

$$D = \int_1^4 \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$B = \int_1^4 \frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{2x\sqrt{x}} dx$$

$$E = \int_0^4 (x^2 + 1)\sqrt{x} dx$$

$$C = \int_0^\pi (\sin x - \cos 2x) dx$$

$$F = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

Exercice 15

Calculer :

$$A = \int_1^e x^2 \ln x dx$$

$$F = \int_1^0 (x + 2)e^x dx$$

$$B = \int_0^\pi x^2 \sin x dx$$

$$G = \int_1^{2\pi} e^x \cos x dx$$

$$C = \int_1^2 \ln(x + 2) dx$$

$$H = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$D = \int_0^{\ln 2} x(e^x + e^{-2x}) dx$$

$$I = \int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt$$

$$E = \int_0^1 e^x \ln(1 + e^x) dx$$

$$J = \int_1^e \frac{\ln x}{(x + 2)^2} dx$$

Exercice 16

1 – Déterminer a , b et c tels que :

$$\frac{x^2}{1 + x^2} = ax + b + \frac{c}{1 + x}$$

2 – Montrer que $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \ln 2 - \frac{1}{2}$.3 – Calculer $J = \int_0^1 x \ln(1 + x) dx$.

Exercice 17

Calculer $I = \int_0^1 (x^2 + 1)e^x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(x+1) \sin x}{\cos^3 x} dx$



Exercice (18)

1 – Déterminer a et b pour que :

$$\frac{x^2 - 3x}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{a}{(x+1)} - \frac{b}{(x-1)^2}$$

2 – En déduire $J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 3x}{(x+1)(x-1)^2} dx$.

Exercice (19)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$

1 – Calculer I_0 et I_1 .

2 – En utilisant une intégration par partie, montrer que :

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

3 – Déduire I_5 et I_6 .

Exercice (20)

Calculer :

$$A = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}$$

$$B = \int_e^{e^2} \frac{1 + \ln t}{t \ln t} dt$$

Exercice (21)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 1} dx$$

1 – Calculer I_1 et I_2 .

2 – Montrer que (I_n) est décroissante.

3 – Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

4 – Calculer $\lim I_n$.

Exercice 22

I. Soit $g(x) = (x-1)e^x + x + 1$ définie sur $[0, +\infty[$.

1 – Montrer que $(\forall x \geq 0) \quad g'(x) = xe^x + 1$

2 – Dresser le tableau de variation de g et déduire que $(\forall x \geq 0) \quad g(x) \geq 0$.

II. Soit $f(x) = \frac{xe^x}{(e^x-1)^2}$.

1 – Déterminer Df et étudier la parité de f .

2 – Calculer les limites aux bornes.

3 – Interpréter géométriquement les résultats précédents.

4 – a) Montrer que $(\forall x \in Df) \quad f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x-1)^3} g(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

5 – Tracer (Cf) dans un R.O.N.

6 – a) Montrer que $\frac{1}{e^x-1} = \frac{e^x}{e^x-1} - 1$.

b) Déduire que : $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-1} = \ln \frac{3}{4}$.

c) Donner une primitive de la fonction $x \rightarrow \frac{e^x}{(e^x-1)^2}$.

d) En faisant en intégration par parties, Calculer la surface du domaine limitée par (Cf) , l'axe (Ox) et les droites $x = \ln 2$, $x = \ln 3$.

Exercice 23

Soit f une fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x + \ln(1+x) & x \geq 0 \\ f(x) = x e^x & x < 0 \end{cases}$$

1 – Déterminer Df et étudier les branches infinies.

2 – Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 0. Interprétez.

3 – a) Montrer que $(\forall x > 0) \quad f'(x) = \frac{x+2}{x+1}$ et $(\forall x < 0) \quad f'(x) = (1+x)e^x$.

b) Dresser le tableau de variation de f et construire (Cf) .

4 – Calculer la surface du domaine limitée par (Cf) , (Ox) et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

5 – Soit g la restriction de f sur $I =]-\infty, -1]$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque.

b) Construire (Cg^{-1}) dans le même repère.

Exercice 24

I. Soit $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$

1 – Calculer $g'(x)$.

2 – Déduire le signe de $g(x)$.

II. Soit $\begin{cases} f(x) = 2x - 2 + \frac{\ln x}{x} & x > 0 \\ f(x) = (x - 1)e^x - x & x \leq 0 \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$

1 – Calculer $\lim_{+\infty} f$, $\lim_{-\infty} f$ et $\lim_{0^+} f$.

2 – Étudier la dérivabilité de f à gauche en 0. Interprétez.

3 – Étudier les variations de f et dresser le tableau de variation.

4 – Étudier les branches infinies.

5 – Montrer que (Cf) admet un point d'inflexion d'abscisse négative.

6 – Tracer (Cf) et déterminer la position de (Cf) et $(\Delta): 2x - 2 = y$.

7 – Calculer la surface du domaine limitée par (Cf) et les droites $x = 1$, $x = e$ et $y = 0$.

Exercice 25

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1} & x > 0 \\ f(x) = 1 - \frac{2}{e^x - 1} & x \leq 0 \end{cases}$

1 – Déterminer Df et calculer $\lim_{+\infty} f$, $\lim_{-\infty} f$ et $\lim_{0^+} f$.

2 – Étudier les branches infinies.

3 – Étudier la position de (Cf) et la droite $(\Delta): y = 2x - 1$ sur $]0, +\infty[$.

4 – Étudier la dérivabilité de f à gauche en 0. Interprétez.

5 – Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

6 – Construire (Cf) ($||\vec{l}|| = 1\text{cm}$) dans un R.O.N.

5 – Soit $g(x) = \frac{xe^x + x + 4}{e^x + 1}$.

a) Calculer $g'(x)$.

b) Calculer le volume du corps créé par la rotation de la courbe de la restriction de f sur $[-1, 0]$ autour de l'axe (Ox) (un tour complet).

Exercice (26)

Soit:
$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x} \ln x & x > 0 \\ f(x) = 1 + x - e^{2x} & x \leq 0 \end{cases}$$

1 – $g(x) = x - \ln x$.

a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation g .

b) En déduire que $(\forall x > 0) \quad \ln x \leq x - 1$.

c) En déduire que $(\forall x > 0) \quad \ln x \leq 2\sqrt{x} - 2$.

2 – Calculer $\lim_{+\infty} f$ et $\lim_{-\infty} f$.

3 – Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$.

4 – Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$. Interprétez.

5 – a) Etudier la branche infinie au voisinage $+\infty$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x - 1$ et déduire la branche infinie au voisinage de $-\infty$.

6 – Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation f .

7 – Montrer que (Cf) admet un point d'inflexion d'abscisse 1. Donner l'équation de la tangente en ce point.

8 – Construire (Cf) ($\ln 2 \approx 0,7$).

9 – a) Montrer que h la restriction de f sur $I =]0, +\infty[$ est une bijection.

b) Tracer C_h^{-1} dans le même repère.

10 – Soit
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - \sqrt{u_n} \ln u_n \end{cases}$$

a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 1$.

b) Montrer que u_n est décroissante.

c) Calculer $\lim u_n$.

Exercice 27

$$\text{Soit: } \begin{cases} f(x) = \ln\sqrt{x-1} & x > 1 \\ f(x) = (x-1)e^{-\sqrt{1-x}} & x \leq 1 \end{cases}$$

- 1 – Déterminer Df .
- 2 – Calculer $\lim_{+\infty} f$, $\lim_{-\infty} f$ et $\lim_{1^+} f$.
- 3 – Étudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 1$. Interprétez.
- 4 – a) Montrer que $(\forall x < 1) f'(x) = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{1-x})e^{\sqrt{1-x}}$.
b) Calculer $f'(x)$ pour $x > 1$.
c) Dresser le tableau de variation de f .
- 5 – Étudier les branches infinies.
- 6 – Montrer que (Cf) admet un point d'inflexion d'abscisse -8 .
- 7 – Construire (Cf) ($-4e^{-2} \simeq -0,5$).
- 8 – a) Calculer la dérivée de $h(x) = (x-1)\ln\sqrt{x-1}$.
b) Dédire une fonction primitive de f sur $]1, +\infty[$.
c) Calculer l'aire du domaine limité par (Cf) , $x = 2$, $x = 3$ et $y = 0$.

Exercice 28

$$\text{Soit } f(x) = \ln(1 + e^x) - 1$$

- 1 – Df et limites aux bornes.
- 2 – Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation f .
- 3 – a) Montrer que $f(x) - x = \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) - 1$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$.
b) Étudier les branches infinies.
c) Déterminer l'intersection de (Cf) et les axes du repère.
- 4 – Tracer (Cf) .



Exercice (29)

Soit :
$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ f(x) = x \ln(1+x) & x \geq 0 \end{cases}$$

1 – Df et calculer les limites aux bornes.

2 – Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$. Interprétez géométriquement.

3 – a) Etudier les variations de f .

b) Dresser le tableau de variation de f .

4 – a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Qu'en déduisez-vous ?

b) Montrer que $(\forall t < 1) \quad 1 + t \leq e^t \leq \frac{1}{1-t}$.

c) En déduire que $(\forall x < 0) \quad \frac{x}{x-1} \leq x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \leq 1$.

d) En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$.

e) Montrer que $(D): y = x + 1$ est une asymptote à (Cf) au voisinage de $-\infty$.

5 – Tracer (Cf) .

6 – a) Trouver les réels a, b et c tels que :

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

b) En déduire une fonction primitive de f sur $[0, +\infty[$.

c) Calculer la surface du domaine plan définie par (Cf) , l'axe des abscisses et les droites $x_0 = 0$ et $x = e - 1$.

Exercice (30)

Soit : $f(x) = e^{-|x|} - \frac{1}{2}x + 1$

1 – Df et limites aux bornes.

2 – Etudier les branches infinies.

3 – Etudier la dérivabilité de f en 0. Interprétez.

4 – Calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$ et dresser le tableau de variation de f .

5 – Construire (Cf) dans R.O.N (unité 1cm).

6 – Calculer le volume du corps créé par la rotation de la courbe représentative de la restriction de f sur $[0,1]$ autour de l'axe des abscisses.

Exercice 31

$$\text{Soit : } \begin{cases} f(x) = 3x^2 e^x & x \leq 0 \\ f(x) = x \left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)^2 & x > 0 \end{cases}$$

- 1 – Df et limites aux bornes.
- 2 – Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$.
- 3 – Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$. Interprétez.
- 4 – a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$.
- b) Etudier le signe de $f'(x)$.
- c) Dresser le tableau de variation de f .
- 5 – Etudier les branches infinies.
- 6 – Montrer que (Cf) admet 2 points d'inflexions d'abscisse négatif.
- 7 – Construire (Cf) (unité 1cm) dans R.O.N.
- 8 – Calculer la surface du domaine limité par (Cf) , $x = -2$, $x = 0$ et $y = 0$ (on donne $12e^{-2} \approx 1,6$).

Exercice 32

I. Soit $g(x) = e^{2x} - 2x - 1$

- 1 – Calculer $\lim_{+\infty} g$, $\lim_{-\infty} g$ et étudier les variations de g .
- 2 – En déduire le signe de $g(x)$.

II. Soit $f(x) = (x + 1)e^{-2x} + x + 1$

- 1 – Calculer $\lim_{+\infty} f$ et $\lim_{-\infty} f$.
- 2 – Etudier les branches infinies.
- 3 – a) Montrer $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = e^{-2x} \cdot g(x)$.
- b) Dresser le tableau de variation de f .
- 4 – Etudier la concavité de (Cf) et construire (Cf) .

Exercice 33

I. Soit g définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2}{x} - 1 + 2\ln x$$

1 – Calculer $\lim_{+\infty} g$ et $\lim_{0^+} g$.

2 – a) Calculer $g'(x)$.

b) En déduire que g est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

c) En déduire que $(\forall x > 0) \quad g(x) > 0$

II. Soit f définie par $f(x) = 3 - 3x + 2(x + 1) \ln x$

1 – Montrer que $\lim_{0^+} f = -\infty$. Donner une interprétation géométrique.

2 – a) Montrer que pour tout $x > 0$ $f(x) = x \left[\frac{3}{x} - 3 + 2 \left(1 + \frac{1}{x} \right) \ln x \right]$

b) Calculer $\lim_{+\infty} f$.

c) En déduire la branche infinie de (Cf) au voisinage de $+\infty$.

3 – Montrer $(\forall x > 0) \quad f'(x) = g(x)$.

4 – Dresser le tableau de variation de f .

5 – Montrer que $I(1, 0)$ est un point d'inflexion.

6 – Donner l'équation de la tangente à (Cf) en I.

Exercice 34

Soit : $f(x) = e^x - 2\sqrt{e^x - 1}$

1 – Déterminer Df et calculer $\lim_{+\infty} f$.

2 – Étudier la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

3 – Étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$. Interpréter.

4 – Étudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f .

5 – Construire (Cf) .

6 – Soit h la restriction de f sur $I = [\ln 2, +\infty[$.

a) Montrer que h est une bijection de I vers J à déterminer.

b) Construire (C_h^{-1}) dans le même repère.

5 – Soit $g(x) = \ln(f(x))$.

a) Déterminer Dg et calculer les limites aux bornes.

b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation de f .

Exercice 35

Soit : $f(x) = \ln(e^x - e^{\frac{x}{2}})$

- 1 – Montrer que $Df = \mathbb{R}_+^*$.
- 2 – Calculer $\lim_{+\infty} f$ et $\lim_{0^+} f$.
- 3 – a) Montrer que la droite $(\Delta): y = x$ est une asymptote à (Cf) au voisinage de $+\infty$.
b) Déterminer la position de (Cf) et (Δ) .
- 4 – Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation.
- 5 – Donner l'équation de la tangente à (Cf) au point $A(\ln 4, f(\ln 4))$.
- 6 – Construire (Cf) .
- 7 – a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers un intervalle J qu'on déterminera.
b) Construire (Cf^{-1}) dans le même repère.
c) Calculer $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.
d) Résoudre l'équation $f(x) = f^{-1}(x)$.

Exercice 36

I. Soit : $g(x) = \frac{-x}{x+1} - \ln(x+1)$

- 1 – Montrer que $\lim_{-1^+} g = +\infty$ et calculer $g(0)$.
- 2 – Étudier les variations de g et dresser le tableau de variation de g puis déduire le signe de $g(x)$.

II. Soit : $f(x) = e^{-x}(1 + \ln(1+x))$

- 1 – Calculer $\lim_{+\infty} f$ et $\lim_{-1^+} f$. Conclure.
- 2 – Montrer que $f'(x) = e^{-x} \cdot g(x)$. Dresser le tableau de variation de f .
- 3 – Montrer que $(\exists! \alpha \in]0,1[) / f(\alpha) = \alpha$.
- 4 – Construire (Cf) .

Exercice 37

I. Soit $g(x) = (x + 1)e^x - 1$

1 – Calculer $\lim_{+\infty} g$ et $\lim_{-\infty} g$.

2 – Montrer que $g'(x) = (x + 2)e^x$.

3 – Dresser le tableau de variation de g .

4 – Calculer $g(0)$ puis déduire le signe de $g(x)$.

II. Soit :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^{\frac{1}{x}} - 1} & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1 – Calculer $\lim_{+\infty} f$ et $\lim_{-\infty} f$.

2 – Étudier les branches infinies.

3 – Montrer que f est continue en $x_0 = 0$.

4 – Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$. Donner une interprétation

5 – Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{g^x}}{\left(\frac{1}{e^x} - 1\right)^2}$

6 – Dresser le tableau de variation de f .

7 – Montrer que $f(x) < x \Leftrightarrow x \in]0, \frac{1}{\ln 2}[$.

8 – Construire (Cf) .

III. Soit :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

1 – Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_n < \frac{1}{\ln 2}$.

2 – Montrer que u_n est décroissante et calculer $\lim u_n$.

Exercice 38

Soit : $f(x) = 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$

- 1 – Déterminer Df et calculer les limites aux bornes.
- 2 – Étudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f .
- 3 – Étudier les branches infinies.
- 4 – Montrer que $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour (Cf) .
- 5 – Construire (Cf) .
- 7 – Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation :

$$2xe^x - (m - 1)e^x - 2x + m = 0$$

Exercice 39

Soit g définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + x - \ln(x + 1)$$

- 1 – Déterminer Dg et calculer $\lim_{-1^+} g$.
- 2 – Vérifier que $(\forall x > 0) \quad g(x) = x^2 + x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.
- 3 – Dédire $\lim_{+\infty} g$ puis montrer que (Cg) admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de $+\infty$.
- 4 – Étudier les variations de g et dresser le tableau de variation de g .
- 5 – Construire (Cg) .

1 – On pose $f(x) = x^2 - \ln(x + 1)$.

a) Étudier les variations de f .

b) Montrer que $f(x) = 0$ admet deux solutions $x_0 = 0$ et $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$.

c) Dédire que $(\forall x \in]0, \alpha[) \quad g(x) < x$.

7 – Soit la suite :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{e} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_n < \alpha$.

b) Étudier la monotonie de (u_n) .

c) calculer $\lim u_n$.