

Exercice 79

Etudier la dérivabilité de f au point x_0 dans les cas suivants :

① $f_1(x) = \frac{x+1}{2x-3}$ et $x_0 = 1$.

② $f_2(x) = \sqrt{4x+1} + 2$ et $x_0 = 2$.

③ $f_3(x) = \sin x - \tan x$ et $x_0 = 0$.

④ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 1} & x \neq 1 \\ \frac{5}{2} & x = 1 \end{cases}$ et $x_0 = 1$.

Exercice 80

Etudier la dérivabilité à droite et à gauche de la fonction f au point x_0 puis donner une interprétation géométrique dans les cas suivantes

① $f(x) = x^2 - |x+1|$ et $x_0 = -1$.

② $f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 1 & x < 0 \\ \frac{1}{x+1} & x \geq 0 \end{cases}$ et $x_0 = 0$

③ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ x^2 + x - 2 & x < 1 \end{cases}$ et $x_0 = 1$

④ $f(x) = \begin{cases} x^4 + x^2 - x + 1 & x < 0 \\ \cos x + \sin x & x \geq 0 \end{cases}$ et $x_0 = 0$

Exercice 81

Déterminer D_f puis calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

① $f_1(x) = 7x^2 + x$ ② $f_2(x) = \frac{1}{x^2 + 3x - 1}$

③ $f_3(x) = \frac{x^2 + 4x - 3}{x^2 + 3x - 1}$ ④ $f_4(x) = \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 4}$

⑤ $f_5(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ ⑥ $f_6(x) = (x+3) \cos 3x$

⑦ $f_7(x) = \frac{\sin(4x)}{\cos(2x)}$ ⑧ $f_8(x) = \sqrt{\sqrt{x} - 4}$

Exercice 82

Calculer les limites suivantes en

utilisant la définition du nombre dérivé :

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{2026} - 1}{x}$ ② $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2}}{x - 2}$

③ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \sqrt{3} \sin x}{6x - \pi}$ ④ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{2 \cos x - \sqrt{2}}$

Exercice 83

On considère la fonction définie par : $f(x) = 2x\sqrt{x} - x^2$.

① Calculer les limites de f aux bornes de D_f .

② Etudier la dérivabilité de f à droite du point 0 puis donner une interprétation géométrique.

③ Calculer $f'(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$ puis donner le tableau des variations de f .

④ Calculer $f(4)$, déduire le signe de f sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 84

On considère la fonction définie par : $f(x) = x + \sqrt{x(2-x)}$.

① Déterminer D_f .

② Etudier la dérivabilité de f à gauche du point 2 et à droite du point 0 puis interpréter géométriquement les résultats.

③ Montrer que : $(\forall x \in]0, 2[)$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x(2-x)} + 1 - x}{\sqrt{x(2-x)}}$$

④ Etudier la monotonie de f sur $[0, 2]$.

Exercice 85

On rappelle les formules suivantes :

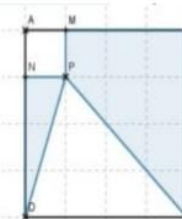
$$\text{Aire d'un triangle : } A_{\text{triangle}} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

$$\text{Aire d'un trapèze : } A_{\text{trapèze}} = \frac{\text{petite base} + \text{grande base}}{2} \times \text{hauteur}$$

Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré de 12cm de côté, et AMPN est un carré de côté x , tel que x appartienne à l'intervalle $I = [0; 12]$. On désigne par $S(x)$ l'aire en cm^2 de la partie grisée.

1. Démontrez que, pour tout nombre x de I , $S(x) = -x^2 + 6x + 72$

2. Pour quelle valeur de x l'aire $S(x)$ est-elle maximale? Que vaut alors cette aire?

**Exercice 86**

L'aire d'un rectangle est 81cm^2 .

Déterminer les dimensions du rectangle pour que sa périmètre soit minimal.

Exercice 87

On considère la fonction définie

par : $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

1. Déterminer D_f puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
2. Etudier les branches infinies de (C_f) .
3. Calculer $f'(x) \forall x \in \mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que la droite $(\delta) : x = 2$ est une axe de symétrie de (C_f) .
5. Tracer la courbe (C_f) .

Exercice 88 On considère la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$.

1. Déterminer D_f .
2. (1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ puis interpréter les résultats.
(2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
(3) Vérifier que la droite $(\Delta) : y = x - 2$ asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
(4) Etudier le signe de $f(x) - (x - 2)$ puis déduire la position de (Δ) % à (C_f) .
3. Calculer $f'(x) (\forall x \in \mathbb{R} - \{1\})$ puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. Vérifier que $f(2 - x) + f(x) = -2 \forall x \in D_f$ puis donner une interprétation géométrique.
5. Calculer $f''(x) (\forall x \in \mathbb{R} - \{1\})$ puis étudier la convexité/concavité de f .
6. Tracer (C_f) .
7. Considérons la fonction $h(x) = f(|x|)$.
(1) Etudier la parité de h .
(2) Dresser le tableau de variation.
(3) Tracer C_h dans le même repère.

Exercice 89

On considère la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x - 4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} & x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & x > 1 \end{cases}$

1. Déterminer D_f .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
4. Etudier les branches infinies de (C_f) .
5. Etudier la dérivabilité de f à droite et gauche du point 1, puis interpréter géométriquement les résultats.
6. Calculer $f'(x) (\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1])$.
7. Calculer $f'(x) (\forall x \in]1, +\infty[)$.
8. Dresser le tableau de variation de f sur D_f .
9. Calculer $f''(x) (\forall x \in]-\infty, 0[\cap]0, 1])$ puis déduire que (C_f) admet un point d'inflexion I à déterminer ensuite tracer (C_f) .

Exercice 90

On considère la fonction définie par : $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

1. Déterminer D_f .
2. Montrer que f est une fonction 2π -périodique.
3. Montrer que le point $A(\frac{\pi}{2}, 0)$ est un centre de symétrie de (C_f) .
4. En déduire qu'on peut étudier f à l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
5. (1) Montrer que $f'(x) = \frac{-1}{1 + \sin x}$ pour tout x dans I .
(2) Donner le tableau de variations de f sur U .
6. Tracer la partie de la courbe (C_f) relative à l'intervalle I .

Exercice 91

On considère la fonction définie par : $f(x) = \frac{\tan^2 x}{1 - \tan^2 x}$

1. Déterminer D_f .

- | | |
|---|--|
| <p>2. (1) Montrer que f est une fonction périodique T, en déterminant T.</p> <p>(2) Vérifier que f est pair puis déduire D_E l'ensemble d'étude de f.</p> | <p>3. Donner le tableau de variations de f sur D_E.</p> <p>4. Tracer la courbe (C_f).</p> |
|---|--|
-