

Exercice 13

Calculer les limites suivantes :

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} \quad \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - x + 5}{x - 4}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad \textcircled{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x-1} + 2}$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{3}x^2}{x^3 - x} \quad \textcircled{6} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2021 - x^2}{x^2 + 2021}$$

$$\textcircled{7} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad \textcircled{8} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1 + \sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}$$

Exercice 14

① On considère la fonction f_1 définie par :

$$\begin{cases} f_1(x) = \frac{x^3 - 8}{\sqrt{2x+5} - 3} ; x \neq 2 \\ f_1(2) = 36 \end{cases}$$

Déterminer D_{f_1} puis étudier la continuité de f au point 2.

② On considère la fonction f_2 définie par :

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} ; x > 3 \\ \frac{2x^2 - 5x - 3}{3 - x} + \frac{29}{4} ; x < 3 \\ \frac{1}{4} ; x = 3 \end{cases}$$

Déterminer D_{f_2} puis étudier la continuité de f au point 3.

③ On considère la fonction f_3 définie par :

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\frac{\pi}{1+x})}{\pi x} ; x > 0 \\ \tan(x)E(\frac{1}{x}) ; x < 0 \\ 1 ; x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f_3 est continue au point 0.

④ On considère la fonction f_4 définie par :

$$f_4(x) = \begin{cases} \frac{(3-x^2)^2 - a}{x-2} ; x < 2 \\ \frac{3x+b}{4} ; x \geq 2 \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f_4 soit continue en 2.

⑤ On considère la fonction f_5 définie par :

$$f_5(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x} ; x \neq 0 \\ a ; x = 0 \end{cases}$$

Trouver la valeur de a pour que f_5 soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1} ; x < 1 \\ \frac{x^2 - 2x - 8}{|x-2| - 2} ; x \geq 1 \end{cases}$$

① Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

② Étudier la continuité de f en 1.

③ f admet-elle un prolongement par continuité en 4?

Exercice 16

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = (x-2) \tan\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

Montrer que f admet un prolongement par continuité en 2.

Exercice 17

Trouver l'image de l'intervalle I par la fonction f dans chacun des cas suivants :

① $I =]0, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x+1}$.

② $I = [-2, 1[$, $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

③ $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin x$.

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$$

- ❶ Étudier la continuité de f en 1 et en $\sqrt{2}$.
- ❷ Soit $k \in \mathbb{Z}$, montrer que f est continue en k .
- ❸ f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
- ❹ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Exercice 19

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0, 1]$ tel que $1 < f(0) + f(1) < 2$.

- ❶ Montrer que la fonction $xf(1-x)$ est continue sur $[0, 1]$.

- ❷ Montrer que $\exists \alpha \in]0, 1[: f(1-\alpha) + f(\alpha) = 1 + \sqrt{\alpha}$.

Exercice 20

- ❶ Montrer que l'équation $x^3 + 5x - 1 = 0$ admet une seule solution α de $\mathbb{R}$ et que $0 < \alpha < 1$.

- ❷ (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'équation $x^3 + 5x = 1 + \frac{1}{n}$ admet une seule solution notée α_n de $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que $\forall n \geq 1 : \alpha < \alpha_n$.

(c) Comparer α_{n+1} et α_n .

Exercice 21

- ❶ Montrer que l'équation $x^n + nx - 1 = 0$ admet une seule solution α_n dans $]0, 1[$.

- ❷ Étudier la monotonie de la suite (α_n) .

Exercice 22

- ❶ Comparer les nombres suivants : $\sqrt[3]{100}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt[4]{80}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt[3]{28}$.

- ❷ Simplifier les expressions suivants :

$$A = \frac{8^{\frac{-4}{3}} \cdot 10^{\frac{3}{2}}}{5 \cdot 4^{\frac{-7}{3}}} \quad B = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$C = \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{16}} \cdot \sqrt{2}}}{\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2}} \quad D = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[20]{3\sqrt[9]{9}}}{\sqrt[4]{81} \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$$

$$E = \frac{\sqrt{a^5} \cdot (\sqrt{a^7})^2}{\sqrt{a^3} \cdot a^4 \cdot \sqrt{a^2}}$$

- ❸ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $\sqrt[3]{2-x} = \sqrt{x}$.

(b) $\sqrt{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}} = 0$.

(c) $\sqrt[3]{x^{3/2}} \leq \sqrt{x}$.

Exercice 23

Calculer les limites suivantes :

❶ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ ❷ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

❸ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x+1} - 1}$ ❹ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3+1} - 1}{\sqrt{x^2+1} - 1}$

❺ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \sqrt{x}$

❻ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-x} - \sqrt{x^3+6x-7}}{x-1}$

❼ $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-x} - \sqrt{x^3+6x-7}}{x-1}$

Exercice 24

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x-2} ; & x \geq 3 \\ x - 1 + \sqrt[3]{3-x} ; & x < 3 \end{cases}$$

- ❶ Déterminer D_f

- ❷ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

- ❸ Étudier la continuité de f sur D_f .

- ❹ Étudier la monotonie de f sur $I = [3, +\infty[$.

- ❺ Soit g la restriction de f sur I .

(a) Montrer que g admet une fonction réciproque sur J qui va être déterminée.

(b) Déterminer $g^{-1}(x)$ en fonction de x pour tout $x \in J$.

Exercice 25

- ❶ (a) Montrer que l'équation $2x^3 + 5x - 4 = 0$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$ noté α .

(b) Vérifier que $0 < \alpha < 1$.

(c) En utilisant la Dichotomie déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

Exercice 26

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = \sqrt{x} - 1 + nx$.

- ❶ Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n tel que $0 < \alpha_n < 1$.

- ❷ (a) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) = \sqrt[n+1]{\alpha_n}(1 - \sqrt[n+1]{\alpha_n}) + \alpha_n$.

(b) Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \alpha_{n+1} < \alpha_n$.

❸ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < \alpha_n < \frac{1}{n}$.

❹ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < n\alpha_n < 1$.

Exercice 27

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

❶ Montrer que la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

❷ Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$ et donner le tableau de variation.

❸ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$.

Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet exactement deux solutions a_n et b_n tel que $0 < a_n < 1 < b_n$.

❹ Montrer que $\forall n \geq 3 : a_{n+1} < a_n$.

❺ Montrer que $\forall n \geq 3 : \frac{1}{n^2} < a_n < \frac{4}{n^2}$.

Exercice 28

Soit a et b de $\mathbb{R}$ tel que $a < b$ et on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} - \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}$$

❶ Montrer que f est continue sur $]a, b[$.

❷ On considère la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \arctan(f(x)) ; x \in]a, b[\\ g(a) = -\frac{\pi}{2} \\ g(b) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(a) Montrer que g est continue sur $[a, b]$.

(b) Déduire que $\exists c \in]a, b[: f(c) = 0$.

Exercice 29

Calculer les limites :

❶ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - \frac{\pi}{2}}{x}$.

❷ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan(\sqrt{x} - x)}{\sqrt{x} - 1}$

❸ $\lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$

❹ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{\arctan x}}{\arctan(\sqrt{x^4 + x^2})}$

Exercice 30

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \arctan x + 2x - 1.$$

❶ Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

❷ Montrer que l'équation $f^{-1}(x) = x$ admet une seule solution $\alpha \in \mathbb{R}$ et que $0 < \alpha < 1$.

❸ étudier le signe de la différence $f(x) - x$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 31

On considère la fonction f définie sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ par :

$$f(x) = \tan 2x - \frac{1}{x}.$$

❶ Montrer que f est une bijection de $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ dans $\mathbb{R}$.

❷ (a) Montrer que $\exists ! \alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] : \tan 2\alpha = \frac{1}{\alpha}$.

(b) Montrer que $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

❸ (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]) : nx \tan(2x) = x + n \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{n}$

(b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists ! x_n \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]) : nx_n \tan(2x_n) = x_n + n$

(c) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \alpha < x_n$.

(d) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : x_{n+1} < x_n$.

Exercice 32

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

❶ $\arctan(\tan x) = \frac{\pi}{5}$

❷ $2 \arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1-x^2}{2x}\right)$.

❸ $\arctan x + \arctan 3x = -\frac{\pi}{3}$

Exercice 33

On considère la fonction f définie sur $I =]0, +\infty[$

par :

$$f(x) = \arctan x - \frac{1}{\arctan x}.$$

❶ Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

❷ (a) Montrer que f est croissante sur I .

(b) Montrer que f est bijective de I dans J qu'il faut déterminer.

(c) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x dans J .

Exercice 34

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x}.$$

❶ Déterminer D_f puis calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

❷ Montrer que f est continue sur D_f et calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - f(x))$$

❸ Montrer que f est bijective de D_f sur un intervalle J à déterminer.

❹ Déterminer f^{-1} .

Exercice 35

On considère la fonction suivante f définie sur $]-\infty, \frac{\pi}{2}[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x} - \sqrt[3]{x^2} & ; x \in]-\infty, 0[\\ \arctan(\sqrt{\tan(x)}) & ; x \in [0, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

❶ Montrer que f est continue en 0.

❷ Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

❸ On pose $I = [0, \frac{\pi}{2}[$, montrer que f est bijective de I dans I .

❹ (a) Résoudre dans I l'équation $f^{-1}(x) = x$.

(b) Résoudre dans I l'inéquation $f^{-1}(x) > x$.

❺ Soit $\beta \in]0, 1[$. On considère la fonction $g(x) := f(\frac{\pi}{2} - x)$.

Montrer que g est continue et strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

❻ Soit $x \in I$.

(a) Montrer que :

$$(\exists ! y \in [0, \frac{\pi}{2}[); f(\frac{\pi}{2} - y) = \beta f(x).$$

(b) Montrer que : $y \geq \frac{\pi}{2} - x$.

(c) Montrer que $y = \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x = 0$.

Exercice 36

(DS 2017/2018)

Soient a un réel et f une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & ; x > 0 \\ \arctan(-x) + \sqrt[3]{-x} + a & ; -1 \leq x \leq 0 \\ \sqrt[3]{1-x^3} + x & ; x < -1 \end{cases}$$

❶ Déterminer D_f .

❷ Calculer les limites aux bornes du D_f .

❸ (a) suivant les valeurs de a étudier la continuité de f en 0.

(b) Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en -1.

(c) Montrer que f est continue sur l'intervalle $] -\infty, -1[$.

❹ Montrer que : $(\forall x > 0) : f(x) = \frac{\pi}{2}$.

❺ Dans cette question on suppose que $a = -\frac{\pi}{4}$ et on considère g la restriction de f à $[-1, 0]$.

(a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α dans $] -1, 0[$.

(b) Montrer que g est bijective de $[-1, 0]$ dans un intervalle J à déterminer.