

Exercice 185

I) Soit n un entier naturel non nul, simplifier les expressions suivantes :

$$\textcircled{1} \frac{(n+1)!}{(n-1)!} \quad \textcircled{2} \frac{(n!)^2}{(n-1)!(n+1)!} \quad \textcircled{3} \frac{n.n!}{(n+1)!}$$

II) $\textcircled{1}$ Par récurrence montrer que : $n! \leq n^n$; $(\forall n \geq 1)$

$\textcircled{2}$ Montrer que :

$$(a) A_{n+1}^{p+1} = (n+1)A_n^p \quad (b) C_{n+1}^{p+1} = \frac{n+1}{p+1}C_n^p.$$

III) Déterminer n dans les cas suivants :

$$\textcircled{1} A_n^2 = 72.$$

$$\textcircled{2} A_n^4 = 42A_n^2.$$

$$\textcircled{3} 2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n.$$

IV) Soit n et p deux entiers naturels, Démontrer les égalités suivantes :

$$\textcircled{1} pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1} \quad 1 \leq p \leq n.$$

$$\textcircled{2} C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1} \quad 0 \leq p \leq n.$$

$$\textcircled{2} C_n^p = C_{n-2}^{p-1} + 2C_{n-2}^{p-2} + C_{n-2}^{p-3} \quad 2 \leq p \leq n.$$

Exercice 186

Une enquête sur 700 travailleurs d'une sociétés concernant la moyenne du transport utiliser donne les résultats suivants :

500 utilisent le bus de la société.

400 utilisent les taxis.

260 utilisent Les deux moyennes du transport.

$\textcircled{1}$ Déterminer le nombre des travailleurs qui utilisent le bus uniquement.

$\textcircled{2}$ Déterminer le nombre des travailleurs qui utilisent les taxis uniquement.

$\textcircled{3}$ Déterminer le nombre des travailleurs qui n'utilisent aucune de ces moyennes de transport.

Exercice 187

En utilisant les chiffres suivants : 1-2-3-4-5.

$\textcircled{1}$ Combien de nombre composer de trois chiffres peut-on écrire ?

$\textcircled{2}$ Combien de nombre composer de trois chiffres différents peut-on écrire ? (différents deux à deux)

$\textcircled{3}$ Combien de nombre composé de trois chiffres et qui contient le chiffres 4 peut-on écrire ?

$\textcircled{4}$ Combien de nombre paire composé de trois chiffres peut-on écrire ?

$\textcircled{5}$ Combien de nombre composé de trois chiffres différent et divisibles par 3 peut-on écrire ?

Exercice 188

Dans un ensemble composé de 12 hommes et 8 femmes, on veut construire une comité de 3 personnes.

$\textcircled{1}$ Quel est le nombre de comités possibles ?

$\textcircled{2}$ Quel est le nombre de comités possibles qui contient un seul homme ?

$\textcircled{3}$ Quel est le nombre de comités possibles composé seulement par les femmes ?

$\textcircled{4}$ Quel est le nombre de comités possibles qui contient au moins un homme ?

Du même ensemble on veut choisir une comité composé d'un président et d'un vice président et un secrétaire.

$\textcircled{5}$ Quel est le nombre de comités possibles ?

$\textcircled{6}$ Quel est le nombre de comités possibles sachant que le président est un homme ?

$\textcircled{7}$ Quel est le nombre de comités possibles sachant que le président est un homme et la secrétariat et occupé par une femme ?

Exercice 189

Dans un concours chaque candidat doit répondre aux 7 questions parmi 10.

- ❶ Calculer le nombre des cas possibles ?
- ❷ Calculer le nombre des cas possibles sachant que les trois premières questions sont obligatoires ?
- ❸ Calculer le nombre de cas possible sachant que les quatre questions parmi les cinq premières sont obligatoires ?

Exercice 190

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher dont cinq verts, trois rouges et deux jaunes. On y prélève simultanément trois boules de l'urne.

- ❶ Combien de prélèvements différents peut-on ainsi obtenir ?
- ❷ Combien de prélèvements qui contiennent des boules de mêmes couleurs peut-on ainsi obtenir ?
- ❸ Combien de prélèvements qui contiennent des boules de couleurs différentes deux à deux peut-on ainsi obtenir ?
- ❹ Combien de prélèvements qui ne contiennent pas de boules rouges peut-on ainsi obtenir ?
- ❺ Combien de prélèvements qui contiennent au moins deux boules verts peut-on ainsi obtenir ?

Exercice 191

Deux urnes A_1 et A_2 contiennent 7 boules indiscernables au toucher dont quatre blanches et trois noires. on considère l'expérience suivante :

On-y-prélève simultanément deux boules de A_1 et deux boules de A_2 .

- ❶ Combien de prélèvements différents peut-on ainsi obtenir ?
- ❷ Combien de prélèvements qui contiennent des boules de mêmes couleurs peut-on ainsi obtenir ?
- ❸ Combien de prélèvements qui contiennent deux boules de chaque couleur peut-on ainsi obtenir ?
- ❹ Combien de prélèvements qui contiennent trois boules blanches et une noir peut-on ainsi obtenir ?
- ❺ Combien de prélèvements qui contiennent trois

boules noires et une blanche peut-on ainsi obtenir ?

Exercice 192

Deux urnes A_1 et A_2 contiennent 7 boules indiscernables au toucher dont quatre blanches et trois noirs. on considère l'expérience suivante :

On prélève une boule de A_1 et on les met dans A_2 puis on prélève simultanément deux boules de A_2 .

- ❶ Représentes l'expérience par un arbre pondéré ?
- ❷ Combien de prélèvements qui contiennent des boules de mêmes couleurs peut-on ainsi obtenir ?
- ❸ Combien de prélèvements qui contiennent deux boules blanches peut-on ainsi obtenir ?
- ❹ Combien de prélèvements qui contiennent deux boules noirs peut-on ainsi obtenir ?

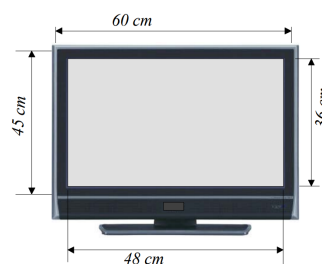
Exercice 193

Un écran de type LCD

de forme rectangulaire a pour dimensions 60cm * 45cm.

La partie principale de l'écran est elle-même représentée par un rectangle de dimensions

48cm * 36cm. Sachant qu'un pixel de l'écran est défectueux, détermine la probabilité de l'événement A défini par : "le pixel défectueux se trouve sur la partie principale de l'écran".



Exercice 194

(Deux urnes)

Une urne "A" contient 8 boules indiscernables au toucher : 4 sont noires, 3 sont blanches et une rouge. Une autre urne "B" contient 4 boules indiscernables au toucher : 2 sont noires et 2 sont blanches. **On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne "A" et une de l'urne "B".**

- ❶ Calculer le nombre des cas possibles ?
- ❷ Calculer La probabilité des événements suivants :

"A" les trois boules sont noires.

"B" les trois boules sont de même couleur.

"C" Avoir une seule boule noire.

Exercice 195

(Deux évènements incompatibles)

Un sac contient des jetons numérotés comme suite : 1, 1, 1, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5. On tire une jeton du sac.

❶ Calculer les probabilités des évènements suivants : "1", "2", "3", "4" et "5".

❷ (a) Pourquoi les évènements "1" et "4" sont-ils incompatibles ?

(b) En déduire $P(\{1\} \cup \{4\})$

❸ Déterminer la probabilité de l'évènement "non 1".

Exercice 196

(Un arbre pondéré)

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux noires "N" et trois blanches "B". On dispose également de deux sacs contenant des jetons : l'un est noir et contient un jeton noir et trois jetons blancs, l'autre est blanc et contient deux jetons noirs et deux jetons blancs. On extrait une boule de l'urne, puis on tire un jeton dans le sac qui est la même couleur que la boule tirée.

❶ Combien y a-t-il d'issues possibles ? Les explicités.

❷ A l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la probabilité de chacune de ces issues.

❸ Déterminer la probabilité de l'évènement A "la boule et le jeton extraits sont de la même couleur"

Exercice 197

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher : 3 sont blanches numérotées 2-1-1, 2 sont noirs numérotées 4-2 et 3 sont verts numérotées 4-1-1.

On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne .

❶ Calculer La probabilité des évènements suivants :

"A" Avoir trois nombres paires.

"B" les trois couleurs sont différentes.

"C" Avoir une seule fois le nombre 2.

Exercice 198

Une urne contient 10 boules numérotées 1-1-1-2-2-2-3-3-4-4. On tire successivement et avec remise 4 boules de l'urne .

❶ Calculer La probabilité des évènements suivants :

"A" Avoir le nombre '1' au deuxième tirage.

"B" Avoir le nombre '1' une seule fois exactement.

"C" Avoir le nombre '1' deux fois.

"D" Ne pas avoir le nombre '2'.

"C" Avoir des nombres différents.

"E" Avoir le nombre '3' deux fois exactement.

Exercice 199

(Probabilité conditionnelle)

On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 deux fois.

On considère les évènements suivants :

"A" Avoir le nombre '6' dans la première lance.

"B" Avoir le nombre '6' dans la deuxième lance.

"C" La somme des deux nombres obtenus égale à 4.

❶ Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ et $p_A(B)$?

❷ les évènements sont-ils indépendants ?

Exercice 200

(Un dé lancer 5-fois)

On lance un dé équilibré à six faces numérotées 1-1-2-2-3-4 trois fois.

❶ Calculer La probabilité des évènements suivants :

"A" Avoir le nombre '2' une seule fois exactement.

"B" Avoir le nombre '3' deux fois exactement.

"C" Ne pas avoir le nombre '1'.

❷ Cette fois, On lance ce dé cinq fois Calculer La probabilité des évènements suivants :

"D" Avoir le nombre '1' deux fois exactement.

"C" Avoir le nombre '1' au plus une seule fois.

Exercice 201

(Le coureur)

Un coureur traverse un trajectoire qui se compose de 4 obstacles, on suppose que la probabilité qu'un obstacle soit tombé par le coureur et $\frac{1}{5}$.

Calculer La probabilité des évènements suivants :

"A" Le coureur fait tomber le 1^{er} obstacle uniquement.

"B" Le coureur ne fait tomber aucun obstacle.

"C" Le coureur fait tomber un seul obstacle.

Exercice 202 (Un exercice de la chasse)

Dans un exercice de la chasse, quelqu'un tire vers un tableau, on suppose que la probabilité p que cette personne arrive à frapper le tableau est la moitié q qu'elle n'arrive pas.

❶ Calculer p et q

❷ Calculer la probabilité que la personne frappe le tableau seulement au troisième tir.

❸ Calculer la probabilité qu'elle frappe le tableau une fois sur chaque deux tirs.

Exercice 203 (Tirage de n -boules)

Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires, les boules sont indiscernables au toucher.

❶ On tire aléatoirement une seule boule de l'urne.

Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?

❷ On tire successivement et avec remise 5 boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'avoir une boule blanche deux fois exactement ?

❸ On tire successivement et avec remise n boules de l'urne.

(a) Montrer que la probabilité d'avoir au moins une boule blanche est : $p = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

(b) Quel est le nombre minimal de tirage pour que p soit supérieure ou égale à 0.999 (Hint : $\log_{10}(3) = 0.48$)

Exercice 204 *

Une urne contient 6 boules rouges numérotées 1-2-3-4-5-6 et 6 boules verts numérotées 1-2-3-4-5-6.

I) On tire simultanément 4 boules de l'urne.

❶ Calculer La probabilité des événements suivants :

"A" Parmi les boules tirées il n'y a pas de deux nombres égaux.

II) On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne.

Exercice 205 (Bac 2018 2^{ème} session)

On lance une pièce monétaire non trichée 10 fois soit X la variable aléatoire qui associe chaque résultat par la fréquence du pile.

❶ (a) Déterminer les valeurs de X .

(b) Calculer $P(X = \frac{1}{2})$.

❷ Calculer $P(X \geq \frac{9}{10})$.

Exercice 206 Une urne contient 4 boules blanches numérotées 2-2-0-4 et 3 boules noires numérotées 2-0-4. On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne :

❶ Calculer le nombre de cas possibles ?

❷ Calculer La probabilité des événements suivants :

"A" les trois boules sont de même couleur.

"B" la somme des trois nombres tirés égale à 6.

❸ (a) Calculer La probabilité de l'événement ' $A \cap B$ '.

(b) Quelle est La probabilité de l'événement suivant ? On tire 3 boules dont la somme de ces nombres égale à 6 sachant que la première boule tirée est blanche

Exercice 207

Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules rouges. On tire successivement et sans remise 4 boules de l'urne :

❶ Calculer le nombre des cas possibles ?

❷ Calculer La probabilité des événements suivants :

"A" Avoir au moins une boule rouge parmi les boules tirées.

"B" Avoir exactement deux boules rouges.

"C" Avoir exactement deux boules rouges sachant que la deuxième boule tirée est rouge.

Exercice 208 (Examen blanc 2013)

Une urne contient 2 boules rouges et 1 boule bleue. On tire aléatoirement une boule de l'urne :

- Si la boule tirée est bleue, la boule est ramenée à l'urne.

- Si la boule tirée est rouge, la boule est laissée à côté de l'urne puis on pose à sa place une boule bleue.

On continue notre tirage de la même façon n fois ($n \geq 2$).

Soit X la variable aléatoire associée au nombre de boules rouges restant dans le sac.

❶ On suppose que $n = 3$.

(a) Déterminer la loi de probabilité associée à X .

(b) Calculer l'espérance mathématique $\mathcal{E}(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$.

❷ On suppose que $n \geq 2$.

(a) Déterminer $X(\Omega)$ et calculer $p(X = 2)$.

(b) Montrer que $p(X = 1) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

(c) Déterminer la loi de probabilité associée à X .

Exercice 209

(Concours de l'Iscae 2014)

Une urne $\mathcal{U}_1$ contient 3 boules rouges et 5 vertes.

Une urne $\mathcal{U}_2$ contient n boules rouges, 3 vertes et 2 blanches. On tire au hasard une boule de $\mathcal{U}_1$, puis on la jette dans $\mathcal{U}_2$. On tire ensuite au hasard simultanément deux boules de $\mathcal{U}_2$.

Si on tire deux boules rouges de $\mathcal{U}_2$, on gagne 50 dirhams.

Si on tire deux boules vertes de $\mathcal{U}_2$, on gagne 20 dirhams.

Si on tire deux boules blanches de $\mathcal{U}_2$, on gagne 10 dirhams.

Si on tire deux boules de couleurs différentes de $\mathcal{U}_2$, on perd 20 dirhams.

Soit X la variable aléatoire « gain en dirhams à l'issue d'une telle épreuve ». L'espérance de X est :

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} \frac{5(4n^2 - 19n - 12)}{4(n+5)(n+6)} & \textcircled{2} \frac{5(4n^2 - 14n - 12)}{4(n+5)(n+6)} \\ \textcircled{3} \frac{5(4n^2 - 17n - 12)}{4(n+5)(n+6)} & \textcircled{4} \frac{5(3n^2 - 19n - 12)}{4(n+5)(n+6)} \end{array}$$

Exercice 210

(Bac 2010 2^{ème} session)

Une urne contient 10 boules blanches et 2 boules rouges. On tire les boules de l'urne l'une après l'autre et avec remise jusqu'à l'obtention pour la première fois d'une boule blanche, on s'arrête là.

Soit X la variable aléatoire associée au nombre de boules tirées.

❶ (a) Déterminer l'ensemble des valeurs de la variable aléatoire X .

(b) Calculer la probabilité de l'événement $[X = 1]$.

(c) Montrer que $P[X = 2] = \frac{5}{3}$.

(d) Calculer la probabilité de l'événement $[X = 3]$.

❷ (a) Montrer que $\mathcal{E}(X) = \frac{13}{11}$. (où $\mathcal{E}(X)$ est l'espérance mathématique).

(b) Calculer $\mathcal{E}(X^2)$ puis déduire la variance $\mathcal{V}(X)$.

Exercice 211

(Bac 2017 2^{ème} session)

Une urne contient $2n$ boules indiscernables au toucher ($n \in \mathbb{N}$) : n sont noires et n sont blanches. On tire successivement et avec remise 2 boules de l'urne.

On considère le jeu suivant :

- Si la couleur des deux boules tirées est blanche, le joueur gagne 20 points.

- Si les couleurs des deux boules tirées est noire, le joueur perd 20 points.

- Si la couleur des deux boules tirées est différentes, le joueur ne gagnera rien.

❶ Calculer La probabilité où le joueur gagne 20 points perd 20 points et quand il ne gagnera rien.

❷ On répète le jeu précédents 5 fois, calculer la probabilités des événements suivants :

"A" Le joueur gagne 100 points.

"B" Le joueur gagne 40 points.

❸ Pendant un seul jeu, on considère la variable aléatoire X qui prend la valeur **+20** si le joueur gagne ou bien **-20** si le joueur perd et **0** si le joueur n'a pas gagné.

(a) Donner la loi probabiliste de la variable aléatoire

X .

(b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

Exercice 212 (Bac 2016 2nd session)

We have two urns $\mathcal{U}$ and $\mathcal{V}$:

- The urn $\mathcal{U}$ contains 4 red balls and 4 blue balls.
- The urn $\mathcal{V}$ contains 2 red balls and 4 blue balls.

We consider the following experiment :

We draw a ball from the urn $\mathcal{U}$ at random : if it is red, we put it in the urn $\mathcal{V}$ then we draw a ball from the urn $\mathcal{V}$ at random : if it is blue we put it aside, then we draw a ball from the urn $\mathcal{V}$ at random.

Let the following events occur :

- $R_{\mathcal{U}}$: The drawn ball from the urn is red
- $B_{\mathcal{U}}$: The drawn ball from the urn is blue
- $R_{\mathcal{V}}$: The drawn ball from the urn is red
- $B_{\mathcal{V}}$: The drawn ball from the urn is blue

❶ Calculate the probabilities of the two events $R_{\mathcal{U}}$ and $B_{\mathcal{U}}$.

❷ (a) Calculate the probability of the events $B_{\mathcal{V}}$ knowing that the event $R_{\mathcal{U}}$ was realized.

(b) Calculate the probability of the events $B_{\mathcal{V}}$ knowing that the event $B_{\mathcal{U}}$ was realized.

❸ Prove that the probability of the event $B_{\mathcal{V}}$ is $\frac{13}{21}$.

❹ Deduce the probability of the event $R_{\mathcal{V}}$.