

Exercice 45

Soit (u_n) la suite définie par la forme explicite : $u_n = \frac{1}{n^2 + n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) :

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Vérifier que $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$).
3. Prouver que : $u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 46

(La monotonie d'une suite dépend du premier terme)

Soit (u_n) la suite définie par la forme récurrente : $u_n = u_n^2 + 3u_n + 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) et $u_0 \in \mathbb{R}$:

❶ 1^{er} cas $u_0 = 0$.

- (a) Montrer que $u_n \geq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).
- (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

❷ 2^{ème} cas $u_0 = -1$.

Montrer que la suite (u_n) est constante.

Exercice 47

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 4}{2u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

- ❶ Montrer par récurrence que $u_n > 2$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).
- ❷ Montrer que (u_n) est décroissante puis déduire que (u_n) est bornée.

Exercice 48

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = u_n \sqrt{u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

- ❶ Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

❷ Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) puis déduire la monotonie de (u_n) .

❸ Montrer par récurrence que $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$ ($\forall n \geq 2$)

Exercice 49

(Suite géométrique) On considère (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{u_n^2 + 9} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

❶ Montrer que $u_n > \sqrt{3}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

❷ Montrer que (u_n) est décroissante.

❸ On pose $v_n = u_n^2 - 3$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

(a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique on déterminant q et v_0 .

(b) Donner v_n puis u_n en fonction de n .

❹ Calculer $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$.

Exercice 50

(Suite homographique type

1) On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{2u_n - 1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

I) ❶ Démontrer par récurrence que ($\forall n \in \mathbb{N}$) : $u_n > \frac{1}{2}$.

II) On pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

❶ Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

❷ Exprimer v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .

Exercice 51

(Suite homographique type

2)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

I) ❶ Démontrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 1$.

❷ (a) Établir que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}$.

(b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

II) On pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

❶ Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

❷ Exprimer v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .

Exercice 52

(Suite de type $au_n + bn + c$)

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

On pose $v_n = 2u_n - n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

❶ Calculer u_1 et montrer par récurrence que $u_n \geq \frac{n}{2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

❷ Étudier la monotonie de (u_n) .

❸ Montrer que (v_n) est une suite géométrique en déterminant sa raison.

❹ (a) Donner v_n en fonction de n puis montrer que $u_n = 2^n + \frac{n}{2}$.

(b) Montrer que :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = 2^n - 1 + \frac{n(n-1)}{4}.$$

Exercice 53

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

❶ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 1$.

❷ Montrer que (u_n) est décroissante.

❸ Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$.
(a) Calculer v_0 puis montrer que $v_{n+1} - v_n = -1$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

(b) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a : $v_n = -n$ et $u_n = \frac{n+2}{n+1}$.

Exercice 54

Suite arithmético-géométrique

On considère la suite (u_n) tel que :

$$u_{n+1} = 2u_n + 5^n.$$

Pour expliciter le terme général de cette suite, on pose $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \frac{u_n}{5^n}$.

❶ Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{1}{5}$.

❷ (a) On définit la suite $y_n = x_n - \frac{1}{3} \forall n \in \mathbb{N}$, montrer que la suite (y_n) est une suite géométrique on déterminant sa raison q et y_0 .

(b) Donner l'expression de y_n en fonction de n .

❸ En déduire l'expression de x_n en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n .

Exercice 55

Soit (u_n) une suite arithmétique dont les termes sont toutes non nulles.

❶ Montrer que :

$$\frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_n u_{n+1}} = \frac{n}{u_1 u_{n+1}}.$$

❷ Calculer les sommes suivantes :

$$S_n = \frac{1}{1 * 3} + \frac{1}{3 * 4} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

$$T_n = \frac{1}{10 * 11} + \frac{1}{11 * 12} + \dots + \frac{1}{99 * 100}.$$