

Exercice 37

Pour tout entier naturel n on considère : $a_n = 2^n + 3$, $S = a_0 + a_1 + \dots + a_{20}$.
Démontrer que $(S - 62)2^{-21} = 1$.

Exercice 38

Soient (x_n) et (y_n) deux suites satisfaisant la relation suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{k+1} = 3x_k + y_k \\ y_{k+1} = 2x_k + 4y_k \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \end{cases} \quad \text{On introduit deux suites auxiliaires } (z_n) \text{ et } (t_n) \text{ en posant}$$

$z_k = x_k + y_k$ et $t_k = 2x_k - y_k$.

❶ Montrer que les deux suites (z_n) et (t_n) sont géométriques.

❷ Donner l'expression de z_k et t_k en fonction de k puis celle de x_k et y_k .

Exercice 39

On considère la suite (u_n) tel que :

$$u_{n+1} = 2u_n + 5^n.$$

Pour expliciter le terme général de cette suite, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \frac{u_n}{5^n}.$$

❶ Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{1}{5}$.

❷ En déduire l'expression de x_n en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n .

Exercice 40

Soit a un réel tel que $a \geq 2$, on définit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n - a}{2u_n - a - 1} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

❶ On suppose que $a = 2$ et on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ montrer que (v_n) est une suite arithmétique puis déduire u_n en fonction de n .

❷ On suppose que $a > 2$ et on pose $w_n = \frac{2u_n - a}{2u_n - 2}$, montrer que (w_n) est une suite géométrique puis don-

ner une autre fois u_n en fonction de n .

Exercice 41

Calculer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

❶ $u_n = \frac{3n + 5\sqrt{2}}{n + 4}$

❷ $u_n = \frac{2n^2 - 3n + 11}{-4n^3 + n}$

❸ $u_n = -2n^2 + 3n\sqrt{n} + 5n - 7$

❹ $u_n = \frac{3^n - 5^{n+2}}{3^n - 5^{n+1}}$

❺ $u_n = \frac{3^n + 2 \cdot 5^n}{3^n + 2 \cdot 5^n}$

❻ $u_n = n\sqrt{n^2 + 1} - n\sqrt{n^2 - 1}$

Exercice 42

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{k}}$$

❶ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n}{n + \sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n + 1}$$

❷ Étudier la convergence des suites $v_n = \frac{n}{n + \sqrt{n}}$ et

$$w_n = \frac{n}{n + 1}.$$

❸ En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 43

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \arctan u_n \\ u_0 = \sqrt{3} \end{cases}$$

❶ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 1$.

❷ Étudier le sens de variation de (u_n) .

❸ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq n\frac{\pi}{4} + \sqrt{3}$ puis déduire que la suite est non majorée.

Exercice 44

Soit (u_n) une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{8}(1 + \sqrt[3]{u_n})^3 \end{cases}$$

- ❶ Calculer u_1 et u_2 .
- ❷ Prouver que : $0 \leq u_n \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$.
- ❸ Montrer que u_n est croissante et déduire que u_n est convergente.
- ❹ On pose $v_n = \sqrt[3]{u_n} - 1 \forall n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Montrer que v_n est une suite géométrique.
 - (b) Déterminer u_n en fonction de n puis calculer sa limite.
 - (c) Donner S_n en fonction de n tel que :

$$S_n = \sqrt[3]{u_0} + \sqrt[3]{u_1} + \dots + \sqrt[3]{u_{n+1}}.$$

Exercice 45

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{4n-1}$$

Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire qu'elles sont convergentes vers une même limite l .

Exercice 46

Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \text{ et}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Sont convergentes et ont même limite.

Exercice 47

Soient a et b deux réels tel que $0 < a < b$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n} \\ u_0 = a \end{cases} \quad \begin{cases} v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_0 = b \end{cases}$$

- ❶ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < v_n$.

- ❷ Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

- ❸ Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$ puis $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$.

- ❹ En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n$.

- ❺ Déduire des deux questions précédentes que les deux suites sont convergentes.

- ❻ Montrer que la suite (u_nv_n) est constante.

- ❼ En déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n) .

Exercice 48

On considère la fonction f définie sur $I = [0, 2]$ par : $f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 6x}$

- ❶ Étudier les variations de f puis déterminer $f(I)$.
- ❷ On considère la suite suivante $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $(\forall n \in \mathbb{N}^*) :$

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{v_n^2 + 6v_n} \end{cases}$$

- (a) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 < v_n < 2$.
- (b) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
- (c) Déduire que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente puis déterminer sa limite.

Exercice 49

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt[3]{6-x}$

- ❶ (a) Étudier les variations de f .
- (b) Montrer que $f([1, 5]) \subset [1, 5]$
- (c) Montrer que $f(x) = x$ admet une seule solution α dans $]1, 5[$.
- (d) Prouver que $\forall x, y \in [1, 5] :$

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{3}|x - y|$$

- ❷ Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} := f(u_n) \end{cases}$$

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$

En déduire que (u_n) est C.V. et donner sa limite.

③ On pose $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$.

(a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : a_n \leq b_n$.

(b) Montrer que (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.

(c) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |b_{n+1} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{9}|b_n - a_n|$

(d) En déduire que les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et donner leur limite commune.

Exercice 50

① Montrer que pour tout entier n tel que $n \geq 2$ l'équation $(E_n) : x^{n+1} - 2x + 1 = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0, 1[$.

② On définit la suite $(x_n)_{n \geq 2}$.

(a) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

(b) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est convergente et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{2}.$$

Exercice 51

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$ avec $(n \in \mathbb{N} - \{1\})$

① Montrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{2n}{n+1}\right]$

② Déduire que : $f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$

③ Montrer que :

$$(\exists \alpha \in \left[\frac{2n}{n+1}, 2\right]) \quad f(\alpha) = 0$$

④ Vérifier que $\alpha^n = \frac{1}{2 - \alpha}$

Exercice 52

Soit n entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique g_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g_n(x) = x^{n+1} + x^n + x - 1$.

① Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution v_n dans $\mathbb{R}^{**}$ et que $0 < v_n < 1$. On construit donc une suite numérique $(v_n)_{n \geq 1}$.

② Montrer que $(\forall x \in]0, 1[) g_{n+1}(x) < g_n(x)$. Puis déduire la monotonie de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 53

Soit la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n + 4x^2 \text{ avec } (n \in \mathbb{N}^*)$$

1. Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists! \alpha_n \in [0; +\infty[) : f_n(\alpha_n) = 1$$

2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 0 < \alpha_n < \frac{1}{2}$.

3. a) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall x \in]0; 1[) : f_{n+1}(x) < f_n(x)$$

b) En déduire que la suite (α_n) est croissante

4. a) Montrer que la suite (α_n) est convergente

b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = 0$, en déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n.$$

Exercice 54

On définit, pour tout entier $n \geq 1$, une fonction f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - 1$

1. Montrer qu'il existe un unique réel a_n strictement positif tel que $f_n(a_n) = 0$

2. Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone, en déduire sa convergence.

3. Montrer que $a_2 \in]0, 1[$. En déduire la convergence et la limite de $(a_n^{n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$. Puis la limite l de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

On peut montrer que $a_n = \frac{1}{2} (1 + a_n^{n+1})$.

4. Préciser, suivant x compris strictement entre 0 et 1 et différent de $\frac{1}{2}$, la limite de $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$. En déduire directement, sans utiliser 2 la convergence et la limite de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Exercice 55

Pour tout entier n on considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par : $f_n = x^n + 9x^2 - 4$.

❶ Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution dans $]0, +\infty[$ qui sera notée α_n .

❷ Calculer α_1 .

❸ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < \alpha_n < \frac{2}{3}$.

❹ (a) M. que $\forall x \in]0, 1[: f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

(b) Dédire que (α_n) est croissante.

(c) Montrer que (α_n) est convergente puis calculer sa limite.

❺ Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on pose : $\beta_n = \frac{2}{3} - \alpha_n$ et

$$S_n = \sum_{k=1}^n \beta_k.$$

(a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < \beta_n < \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < S_n < \frac{1}{3}$.

(c) En déduire que la suite (S_n) est convergente.

Exercice 56

Soit (a_n) une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

❶ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : a_n \in \mathbb{N}^*$ et étudier la monotonie de (a_n) .

❷ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : a_{n+1} - a_n \geq 1$ en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : a_n \geq n$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n}$.

❸ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : a_n \wedge a_{n+1} = 1$.

❹ Soit l l'unique solution positive de l'équation $x = 1 + \frac{1}{x}$ ($l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$). On pose $b_n = a_{n+1} - la_n$.

(a) Montrer que (b_n) est une suite géométrique

(b) Dédire que $b_n = \left(-\frac{1}{l}\right)^{n+1}$.

❺ Vérifier que $\frac{a_{n+1}}{a_n} - l = \frac{1}{a_n} \left(-\frac{1}{l}\right)^{n+1}$ en déduire que la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 57

❶ Soit x un réel, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n - 1$$

❷ On considère les deux suites :

$$\forall n \geq 0, v_n = u_n + \frac{1}{5^n}, u_n = \frac{E(5^n x)}{5^n}$$

a. Calculer u_0 et v_0 puis montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_n, v_n) \in \mathbb{Q}^2$$

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq x < v_n$

c. Montrer que les deux suites sont adjacentes puis calculer leur limite commune.

d. On considère la suite (w_n) définie par :

$$\forall n \geq 1, w_n = 5^n (u_n - u_{n-1}), w_0 = u_0$$

Montrer que $\forall n \geq 1, 0 \leq w_n < 5$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{w_k}{5^k} = x$

❸ Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. On considère aussi les deux suites suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = p^n (a_n - a_{n-1})$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = a_n + \frac{1}{p^n}, a_n = \frac{E(p^n x)}{p^n}$$

a. Montrer que : $\forall n \geq 0, a_n \leq x \leq b_n$

b. Montrer que (a_n) et (b_n) sont deux suites adjacentes et déterminer leur limite commune.

c. Prouver que $\forall n \geq 1, a_n = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{p^k}$ avec

$$c_{n+1} \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$$