

I. Propositions-Quantificateurs logiques

Exercice 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I . Écrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :

- ❶ f s'annule en un point. ❷ $f > 0$.
 ❸ f est constante. ❹ f est non constante.
 ❺ f n'est pas croissante sur I .

Exercice 2

Exprimer sous la forme de réunion d'intervalles le plus simple possible les parties de $\mathbb{R}$ définies par les conditions suivantes :

- ❶ $[x > -1 \text{ et } x \leq 3] \text{ ou } x \geq 0$.
 ❷ $x \leq 5 \text{ et } [x \geq 3 \text{ ou } x < 0]$.
 ❸ $x = 1 \implies 2x - 3 > 10$.

Exercice 3

Donner la négation puis déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

- ❶ (P_1) : " $(\forall x \in \mathbb{R}) : 1 \leq x \leq 2017$ "
 ❷ (P_2) : " $(\exists x \in \mathbb{Q}) : x^2 = 3$ "
 ❸ (P_3) : " $(\forall x \in \mathbb{R}) : x \leq 0 \text{ ou } x \geq 0$ "
 ❹ (P_4) : " $(\forall x \in \mathbb{N}) (\exists y \in \mathbb{N}) : y = 2x$ "
 ❺ (P_5) : " $(\forall x \in \mathbb{N}) (\exists y \in \mathbb{N}) : x = 2y$ "

Exercice 4

Donner la négation des propositions suivantes

- ❶ $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 > 0$
 ❷ $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R} :$
 $(|x - 1| \leq \alpha \implies |\sqrt{x + 3} - 2| \geq \varepsilon)$
 ❸ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x \in \mathbb{R} : \frac{n}{n+1} \leq x$

Exercice 5

Montrer les propositions suivantes

- ❶ $\forall x \in \mathbb{R} : x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$

- ❷ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+2} :$

$$|\sqrt{x+1} - \sqrt{y+1}| \leq \frac{1}{2}|x-y|$$

II. Raisonnements mathématiques

Exercice 6

- ❶ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$

- ❷ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

i. $2017x + 2018|x| = 1$.

ii. $x^2 + |x-2| = 0$. iii. $|x-2| + |2x-6| = 0$

- ❸ Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : $A = \frac{n+3}{n+5}$ montrer par absurde que : $\forall n \in \mathbb{N}, A \neq 1$

Exercice 7

Montrer par contraposition que :

- ❶ $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(a + b < 2c \implies a < c \text{ ou } b < c)$$

- ❷ Soit a, b , et c des nombres réels strictement positifs, montrer que

$$ab < c \implies (a < \sqrt{c} \text{ ou } b < \sqrt{c})$$

- ❸ soit a un réel fixé montrer que si

$$(\forall \varepsilon > 0 : |a| < \varepsilon) \text{ alors } a = 0.$$

Exercice 8

(Raisonnement par récurrence)

- ❶ Montrer que $2^n \geq n + 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).
 ❷ Montrer que 3 divise $4^n - 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).
 ❸ Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N} :$

$$(1 + a)^n > 1 + na$$

- ❹ Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

- ❺ Soit $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ montrer que $\forall n \in \mathbb{N} :$

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 + a^{2^k}) = \frac{1 - a^{2^n}}{1 - a}$$