

Exercice 115

❶ I) Dans chacun des cas suivants, résoudre l'équation différentielle :

(a) $y' = \frac{3}{2}y$

(b) $-y' + y = 0$

(c) $7y' + 8y + 0$

II) Dans ce qui suit mettre l'équation différentielle sous la forme $y' = ay + b$, et la résoudre :

(a) $y' + 2y = 3$

(b) $3y' - 2y + 1 = 0$

(c) $y' = 0,1(100 - y)$

❷ Déterminer la solution de l'équation différentielle satisfaisant la condition initiale proposée :

(a) $y' = 4y - 3$; $y(0) = -1$.

(b) $y' = -y + 1$; $y(2) = 6$.

(c) $y' = 500 - 0,1y$; $y(10) = 0$.

Exercice 116

On considère l'équation différentielle :

(E) : $y' - 2y = xe^x$

❶ Résoudre l'équation différentielle (E') $y' - 2y = 0$.

❷ Posons $u(x) = (ax + b)e^x$ avec a, b deux réels et u une fonction défini sur $\mathbb{R}$.

(a) Déterminer a et b pour que u soit solution de (E)

(b) Montrer que v est solution de (E') si et seulement si $u + v$ solution de (E).

(c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

❸ Déterminer la solution de l'équation de (E) qui s'annule en 0.

Exercice 117

❶ Dans chacun des cas suivants, résoudre l'équation différentielle :

(a) $y'' + 11y' + 10y = 0$

(b) $y'' - 4y' + 13y = 0$

(c) $y'' + 4y' + 4y = 0$

(d) $y'' + \frac{9}{4}y = 0$

❷ Déterminer la solution de l'équation différentielle satisfaisant la condition initiale proposée :

(a) $y'' - 4y' + 5y = 0$; $y(0) = 5$ et $y'(0) = 2$.

(b) $y'' - 8y' + 17y = 0$; $y(0) = 3$ et $y'(0) = 32$

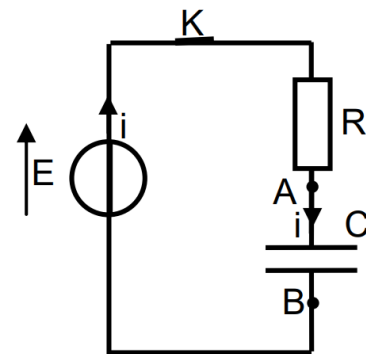
(c) $y'' - \sqrt{3}y' + 3y = 0$; $y(0) = \sqrt{3}$ et $y'(0) = 30$

❸ Vérifier que $f(x) = \frac{x+2}{x}e^{\frac{-x}{2}}$ est une solution de $y'' - \frac{1}{4}y = \frac{2x+4}{x^3}e^{\frac{-x}{2}}$.

Exercice 118

(Dipole RC)

On envisage le circuit suivant constitué d'un conducteur ohmique de résistance R , un condensateur de capacité C initialement vide, un interrupteur K et un générateur de tension E .



A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

❶ Rappeler la relation qui lie la charge q_A de l'armature A du condensateur et l'intensité du courant i dans le circuit. Déduire la relation liant i et la tension u_C aux bornes du condensateur.

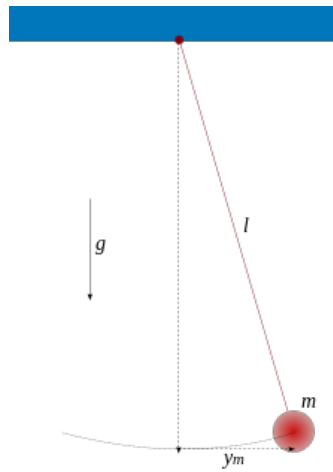
❷ Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de u_C au cours du temps.

❸ Vérifier que : $u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ est une solution de l'équation différentielle précédente avec $\tau = RC$.

Exercice 119

(Un pendule simple)

En physique, le mouvement d'un oscillateur libre non amorti (oscillateur mécanique : ressort, pendule dans le cas des petites oscillations, ou oscillateur électrique) est régi par une équation différentielle



du **second ordre**, du type : $(E) : y'' = -\omega^2 y$, où y'' est la dérivée seconde de la fonction y , ω est la constante est la pulsation de l'oscillateur ($\omega \neq 0$).

On désigne par ϵ l'ensemble des fonctions vérifiant (E) .

❶ Exemples

Montrer que les fonctions suivantes appartiennent à ϵ : la fonction nulle, les fonctions $x \mapsto \cos \omega x$ et $x \mapsto \sin \omega x$, la somme de deux fonctions de ϵ et le produit d'une fonction de ϵ par un réel.

En déduire que la fonction $x \mapsto A \cos \omega x + B \sin \omega x$

appartient à ϵ avec A et B deux réels.

❷ Une propriété différentielle

(a) Montrer que, si $y \in \epsilon$, la fonction $\omega^2 y^2 + y'^2$ est constante sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit y une fonction de ϵ telle que $y(0) = y'(0) = 0$.

Déduire de (a) que y est la fonction nulle.

❸ Résolution

Soit y une fonction de ϵ et z la fonction définie par :

$$z(x) = y(x) - y(0) \cos \omega x - \frac{y'(0)}{\omega} \sin \omega x.$$

(a) Montrer que $z \in \epsilon$; calculer $z(0)$ et $z'(0)$.

En déduire que z est la fonction nulle.

(b) Montrer alors que les fonctions de ϵ sont les fonctions de la forme : $x \mapsto A \cos \omega x + B \sin \omega x$, A et B étant deux réels.

❹ Montrer qu'il existe une unique solution de (E) satisfaisant à la condition initiale :

$$y(0) = y_0 \text{ et } y'(0) = y'_0 \text{ (} y_0 \text{ et } y'_0 \text{ réels donnés).}$$

❺ Application

Déterminer la fonction f solution de l'équation $y'' = -5y$, telle que $f(0) = 50$ et $f'(0) = 10$.